

# 量子力学の数学形式は経験世界のいかなる原理に由来するのか

From Which Empirical Principle, Mathematical Structure of Quantum Mechanics Originated

榛葉 豊\*

Yutaka SHINBA

Abstract : Recently, it happens that the movement for the pursuit of quantum mechanics as one of the general probability theories, looking for the information theoretical principle that decide quantum mechanics. Also, we perceive that the quantum Bayesianic point of view diminishes strangeness of quantum view for the world. However, no later than 1970, it is clear that general probability theory for ortho-complimentary lattice logic is implemented by the linear operator theory on the Hilbert space, so that it means quantum mechanics. We reconsider the thread of derivation of Hilbert space formalism, and what is the origin of that structure of the theory, in the timing of quantum information technology and Bayesian statistics age.

## 1. はじめに

量子力学が道具主義的観点から言えば、あまりに成功した理論であることは論を俟たない。しかしその意味する解釈、世界観については21世紀に入りますます百家争鳴の状況を深めている。量子力学の基礎に関する研究は、20世紀後半には、ボーアの相補性哲学に基づくコペンハーゲン解釈によって、現業に邁進するための思考停止を勧められた量子物理学は大成功を収めてきたのだった。

しかし1970年頃から見直され始めた、アインシュタイン-ローゼン-ポドルスキーのパラドックスとベルの定理にまつわる局所实在論問題の反省機運、1994年のショアによる因数分解量子計算アルゴリズムの発見をきっかけにした量子情報理論研究の解禁状況によって、量子情報科学は順調な滑り出しを果たし今日に至っている。したがって、量子力学の基礎に関する研究も隠れ切支丹の境遇（日本において）ではなく、むしろ花形の分野となっている。

その状況の中で、量子力学の数学形式、すなわちなぜシュレディンガー方程式なのかという疑問、が問われている<sup>1)</sup>。道具主義的にそれが実験事実を説明するからだ、というのではなく、我々の世界のどのような観察事実によって、数学理論の形、構造が規定されてしまうのかということが問われている。超弦理論について、ウィッテンが、それは

神が200年早く人類に教えてしまった秘密であって、なぜなのかは分からない、と言ったとかいわれているが、量子力学についても全く同様、もしくは超弦理論のように「もの」の論理ではなく、より根源的な「こと」の論理であるだけに更に深刻な疑問であろう。

数学的に、何を公理にしたら美しいかという議論はいくらでもできよう。しかしここで問われているのは、物理的などのような原理が本質的なのかと言うことである。そしてその物理的原理の意味を明らかにしたいのである。

そのような方向で、情報理論的な要求が基本的であるとか、確率のベイズ解釈によれば、量子力学の不思議さは大幅に減少するなどと言う主張がされている<sup>2,3)</sup>。

本稿では、量子力学の解釈とか、確率の本性であるとか、实在論、文脈依存性というような哲学的な事柄ではなく、とにかくその数学形式を決めている物理的事実は何かを考えたい。量子力学の基礎についての研究が、市民権を得始めたのは1980年頃からであり、その延長上に今日の議論があるわけであるが、それ以前にかなりのことが分かっていたことを、思い起こしておきたいと思う。特に最近の論点が、情報処理の原理に重きを置いていて、微視的世界の命題論理という観点の研究があまり見られないようなので、それをまとめておく。

2014年3月4日受理

\* 総合情報学部 人間情報デザイン学科

## 2. 量子力学の諸形式

量子力学の数学的形式はいくつもあるが、その代表的なものは、正準量子化、経路積分法、確率過程量子化それに隠れた変数理論であろう。

1) 正準量子化には、シュレディンガーの波動力学とハイゼンベルクの行列力学の2通りがあるが、ディラックの変換理論によって同等なものであることが示されている<sup>4)</sup>。これはブラケット形式によれば、そして同じことであるがヒルベルト空間<sup>5)</sup>で考えれば、同じことをしていることは明瞭である。ここでちょっと注意しておきたいのは、フォン・ノイマンの本<sup>5)</sup>が量子力学の数学的基礎付けをしたなどと言われることについてであるが、フォン・ノイマンが合理化したのは量子力学のおもちゃについてであって、物理学理論としての量子力学の合理化は、シュワルツの超関数論、ゲルファントの3つ組み空間論を待たなくてはならない。それはディラックの直感をそのまま厳密化したものであった。

2) 一方、ファインマンの経路積分<sup>6)</sup>は、すべての運動学的に可能な経路に作用積分に比例する位相因子を付与して加え合わせると、求める事象の確率振幅になるというものである。これも時間分割近似によれば、シュレディンガー方程式から（数学的には厳密でないが）導出できる。

なお、ファインマン-ヒップスの経路積分法の本<sup>6)</sup>には、経路積分法を発見法的に導くときの足がかりとして、結晶中の不純物による散乱パターンのお話が出てくる。不純物に散乱によってスピンの反転する場合と反転しない場合で、反転して「証拠」を残してしまった時には干渉パターンは崩れ、証拠がない場合には干渉は残る、と言う事実が書かれている。朝永が「光子の裁判」でとりあげたヤング型ダブルスリット実験より現実的な感じがして、秀逸な記述である。

3) 確率過程量子化はネルソンによるもので<sup>7-11)</sup>、(素粒子論で計算テクニックとしてパリジ-ウー流という別の確率過程量子化と言われる計算法があるが)、古典的運動をしている粒子が、空間(エーテル)の揺動でブラウン運動をしているという描像である。確率微分方程式論での前進微分、推古微分という概念を駆使するのであるが、一見では不思議なことであるが、この力学はシュレディンガー方程式に完全に一致する結果をもたらす。

4) 最後に隠れた変数である。有名なものはボーム理論とか高林の流体力学形式などである。これらは決定論を回復するという目的で、我々の知らない隠れた変数の値が分からないので現象は確率的になるとするのだが、非局所的にならざるを得ないし、実験に合うためには非常に醜いものになってしまう。

以上いずれにせよ、隠れた変数理論以外は等価なものであるので、シュレディンガー形式の場合を考えればよいであろう<sup>12-14)</sup>。

## 3. 一般確率論

量子力学は、微視的世界の事象を(第一には)扱うにせよ、物理学の理論であるからに、事象を予言できなくてはならない。観測量がある値を取ることを予言するという場合、これこれの値になりますというのとか、そこまでは行かないがその値であることは可能でこの程度の可能性が、という場合もあるであろう。後者は確率的記述である(決定論的記述も確率的記述の特別な場合である)物理系の状態を $\psi$ 、観測量を $A$ とする。測定により $A$ の測定値 $x$ が測定値の可能集合の部分集合 $\Delta$ に落ちる確率

$$P(x \in \Delta | \psi, A) \quad (1)$$

が決まればよいわけである。

通常のコルモゴロフによる古典確率論<sup>14)</sup>では、事象の標本空間を $\Omega$ とその上のボレル集合族 $B$ のなす可測空間 $(\Omega, B)$ で定義される規格化された確率測度が(1)式を与える。その確率測度こそが状態 $\psi$ である。

量子力学の場合は次のようになる。物理的な系にはヒルベルト空間が随伴していて、その上の密度作用素 $\rho$ が状態を表し、また観測量もその上の自己共役作用素 $\hat{A}$ が伴

っていて、測定による観測の期待値は、 $Tr \rho \hat{A}$ のようにトレースで得られる。観測量として $\Delta$ に対する射影作用素を取れば、それが(1)を与える。密度作用素が純粋状態の場合、当然ながらボルンの確率解釈である。ある測定値が得られる確率は、波動関数の絶対値の二乗であるし、観測量の期待値は $\langle \psi, \hat{A} \psi \rangle$ となる。

ただし以上のことは、一般確率論の中に、既成の確率論と量子力学を逆に位置づけているだけではある。一般確率論に対して、何かの物理的な原理で制約を課すと量子力学が出てくるという具合にしたいのである。

## 4. 命題の作る束とその上の一般確率論

微視的世界の命題が作る束は、アリストテレス以来の命題論理が作るブール束ではない。それは直相補モジュラー束<sup>15-18)</sup>であり、ブール束を規定する条件から分配律を外した概念である。これは出来上がった量子力学を分析するとそうだと分かるのだが、逆になぜ分配律が成り立たなくなっているのかの理由を考えなければならない。

その前に、もし微視的世界の論理が直相補モジュラー論理であったなら、その命題束上の一般確率論はどのようなものになるのかをみておこう<sup>15-20)</sup>。

まず、直相補モジュラー束はヒルベルト空間の部分空間の作る束で表現される。命題は部分空間に対応し、特に原

子命題は1次元部分空間に相当する。論理和は2つの部分空間で張られる部分空間、論理積は2つの部分空間の共通集合である。否定は直交補空間に対応する。したがってヒルベルト空間で表現された論理束を取り扱えばよい。

グリーソンによれば<sup>19)</sup>、少なくとも3次元以上の可分な、実または複素ヒルベルト空間の閉部分空間上の測度を $\mu$ とすれば、ヒルベルト空間のすべての閉部分空間 $H_A$ に対して、次の性質を持つトレースクラスの半正定値自己共役作用素 $\hat{T}$ がただ一つ存在する。

$$\mu(H_A) = \text{Tr}(\hat{T}\hat{P}_A) \quad (2)$$

ただしここに $\hat{P}_A$ は閉部分空間 $H_A$ への射影作用素である。

この定理を用いれば、部分空間で表現された命題に測度を与えることができる。すなわち直相補モジュラー論理確率論である。そして、それは観測量と状態を、それぞれヒルベルト空間上の作用素で表現した、われわれの量子統計力学なのである。

状態の時間発展は、ガリレイ変換についての時空の並進対称性を要請すれば直ちに(ワイル形式の)シュレディンガー方程式が得られる。

こうして、ブール論理がなぜ成立しないのかを経験世界の観察事実から要約すれば良い。分配律が成立しないことを、物理的な分かりやすい原理として述べれば良いことになる。

## 5. 微視的世界の力学を規定する物理的原理

微視的世界の論理束では分配律が成り立たないことは、次に示すいくつかの例から分かる。

### 1) 不確定性関係

位置と運動量の測定を取り上げよう。不確定性原理によ

れば、位置と運動量の不確定積は $\frac{\hbar}{2}$ を上回る(ここで

はハイゼンベルクの不確定性関係と測定過程による不確定性の両方が不可避的にあることから来る、小澤の不等式に結実した修正については考えない)。位置と運動量の相

空間上では、不確定性の面積が $\frac{\hbar}{2}$ ということであり、

量子統計では状態を数える単位として採用される。

その面積よりかなり大きければ、位置についての命題と運動量についての命題の論理積命題は成立する。しかし、たとえば位置についての命題の方を細分化してやると分配律は成り立たないと考えられる。不確定積が小さい論理積命題は命題として成り立たないとすべきであるからである。

位置 $x$ が区間 $\Delta_i$ に落ちるという命題を $\alpha_{\Delta_i}$ とする。

$$\Delta = \sum_i \Delta_i \quad \text{ただし各区間は隣接しているとする。運動}$$

量が区間 $E$ に落ちるという命題を $\beta$ とする。

$$\alpha_{\Delta} \wedge \beta = (\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \dots) \wedge \beta \neq (\alpha_{\Delta_1} \wedge \beta) \vee (\alpha_{\Delta_2} \wedge \beta) \vee \dots \quad (3)$$

ということである。

### 2) 重ね合わせの原理

ディラックの教科書<sup>4)</sup>では、重ね合わせの原理が基礎として採用されている。重ね合わせの原理は偏光した光子の実験を考えてみれば、成立している事柄である。経験世界には超選択則で禁止されている重ね合わせもあるが、微視的世界での多くの場合成立すると言ってよいであろう。

重ね合わせの原理を論理束の言葉で、原子命題について定義する。

相異なる原子的命題 $\alpha_1, \alpha_2$ があるとする。そのどち

らとも異なる $\alpha_3$ という原子的命題が存在して、

$$\alpha_1 \vee \alpha_2 = \alpha_1 \vee \alpha_3 = \alpha_2 \vee \alpha_3 \quad (4)$$

を満たす。ここに $\alpha_3$ が、 $\alpha_1$ と $\alpha_2$ の重ね合わせであることになる。つまり要請されている2つの状態の重ね合わせは、重ね合わされる2つの命題の双方との最小上界も、重ね合わされる2つの命題の最小上界と同じという要請を満たす。

原子的命題でない命題に対しては、重ね合わせは $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ 、すなわち $\alpha_1$ でもあり、 $\alpha_2$ でもある状態という命題であろう。しかし、原子的命題についてこれを言うとき重ね合わせは恒偽命題になってしまうので、元の命題が原子的命題の時には重ね合わせとして(4)を満たす原子的命題の存在を要請するのである。

こう定義すると、重ね合わせの原理を満足する束はブール束ではあり得ないことがわかる。

実際の具体例としては、シュテルン-ゲルラッハ実験について<sup>20)</sup>を参照。

この論理束版の、原子的命題についての重ね合わせの原理の定義は、どういう意味になっているのかを、これからもっと詳細に研究しなくてはならないだろう。

このように命題論理の観点からは、月並みな要請が物理的原理としての候補として出てきただけのようにも見え

る。だが、論点が整理されたのであるから、その本質の探究に勉めるべきであろう。不確定性原理の方は正準交換関係が課される物理量の間関係である。位置と運動量の場合は、古典的には（非相対論的な場合）一方が他方の時間変化になっているという関係である。だが、角運動量のような交換関係の場合にはそうもいかない。直ちに、一般的な結論に結びつきそうにもない。その点重ね合わせの原理の方は、単一の観測量についての命題束であっても要請される事柄であるので、こちらの方が本質的なのかも知れない。ただし、最初から分かっているような、古典的波動現象では重ね合わせが成り立つのだから、波動方程式になるのは当然、というような見解と紛らわしくなってしまうかも知れない。だが、ここで言いたいのは方程式の形ではなくて、なぜヒルベルト空間によって記述されるのかと言うことである。（シュレディンガー方程式の形は、ガリレイ変換不変性を要請すれば、時間発展ユニタリ群の生成作用素であるハミルトニアン作用素を用いて周知の形になる。）

観察事実と理論形式が直結しない量子力学では、その理論形式の由来を直接的観察事実に求めることができない。今なすべきことは、我々の世界の分節化の仕方の考察である。その極限として、位置とか運動量とかという古典世界の分節化方式が導かれるという具合になるべきである。

量子力学の数学的構造はむしろ技術分野で追求されてきた<sup>21-25)</sup>。

21世紀に入ってからの、量子力学の物理的原理を情報处理的な原理に求める方向はいろいろあって<sup>1)</sup>、超光通信不可能性、安全鍵配布問題、複製禁止定理などから量子力学を導出するなどあるようだが、それらはC\*代数（観測量の作る代数のあるモデル）という構造を前提している。むしろなぜC\*代数という構造であるのか、ということこそ探求されるべきであると思う。

また、バイズ主義的観点で量子力学を検討すれば不思議さが減ずるといふ、それはそれで大切なことではある、試みが<sup>2, 3)</sup>なされてもいるようであるが、量子力学における確率の解釈<sup>25-28)</sup>は、もともと（少なくとも1970年代には）主観解釈が検討されていたのであり、なぜ今頃になってという感が深い。ポパーの主観と客観の間ともいえる確率の傾向性解釈<sup>29-32)</sup>は、量子力学のために考え出されたともいわれているのである。傾向性解釈は客観主義的頻度解釈とは異なり、主観解釈に分類されるものの、主体の意識が認識する信念の度合いではなく、何かある特定の世界の状況とか実験装置に付随する、ある結果を生み出す傾向性の表現なのである。

主観解釈では、すぐに困ってしまうのは、「シュレディンガーの猫」において、箱の中に友人を入れて部屋の外のウィグナーが友人からの電話で（細かい突っ込みは入れないように！）友人からの放射性元素崩壊の知らせを受けるという「ウィグナーの友人問題」において、そこで言う確率は誰の主観によるのかという問題である。このような古

来の困難もまじめに追求できる雰囲気醸成されてきたといえるであろう。

量子情報科学が隆盛し、その上統計学においてもバイズ主義が200年ぶりに復興している今日、再びこのような観点の分析はやりやすくなっている。本稿で取り上げた微視的世界の論理は、アリストテレス以来の命題論理の拡張である、直相補（弱）モジュラー論理であるが、様相論理とか時間の前後をも取り込んだ古代インド哲学での論理学のようなものなども、可能性として考えていきたい。

#### 参考文献

- 1) 木村元, 「量子力学の原理探究」, 科学基礎論研究 40 (2013) 23
- 2) D. Mermin, "Quantum mechanics: Fixing the shifty split", *Phys. Today*, July(2012)8
- 3) M.Pawlowski et.al., "Information Causality as a physical principle", *Nature* 461(2009)1101
- 4) P. Dirac, "*The Foundations of Quantum Mechanics 4th ed.*", Oxford(1958)
- 5) J. von Neumann, "*Die Grundlagen der Quantenmechanik*", (1931)  
訳書: 『量子力学の数学的基礎』(1957) 岩波書店
- 6) R. Feynman and A. Hibbs, "*Quantum mechanics and Path integrals*", (1965) Addison-Wesley
- 7) E. Nelson, "*Quantum Fluctuation*", Princeton UP (1985)
- 8) E. Nelson, "Derivation of the Schroedinger Equation from Newtonian Mechanics", *Rhys. Rev.* 150(1966),1079
- 9) E. Nelson, "*Dynamical Theories of Brownian Motion*", Princeton UP(1967)
- 10) 榛葉豊, 「定理としての確率解釈」, 静岡理工科大学紀要 9巻 (2001年) 365
- 11) 榛葉豊, 「人間中心原理と確率の本性 —確率過程量子化の解釈のために」, 静岡理工科大学紀要 12巻 (2004年) 177
- 12) M. Jammer, "*The Philosophy of Quantum Mechanics*", Wiley (1974)  
井上健訳『量子力学の哲学上, 下』紀伊国屋書店 (1984)
- 13) M. Jammer, "*The Conceptual Development of Quantum Mechanics*", McGraw(1966)  
小出昭一郎訳『量子力学史 I, II』東京図書 (1974)
- 14) A. Kolmogorov, 『確率論の基礎概念』, 根本訳 東京図書 (1975年) 原書は1933年
- 15) J. Jauch, "*Foundations of Quantum Mechanics*", Wiley(1968)
- 16) C. Piron, "*Foundations of Quantum Physics*", W.A.Benjamin, (1976)
- 17) R. Hughes, "*The Structure and Interpretation of*

*Quantum Mechanics*, Harvard(1989)

- 18) S.Watanabe, "*Knowing and Guessing*", Wiley(1969)  
村上陽一郎, 丹治信治訳「知識と推測 1, 2, 3, 4,」  
(1976年) 東京図書
- 19) A. Gleason, *J.Rat.Mech.Analysis*, 6, (1957)885
- 20) 江澤洋, 「量子力学の構造」, 『量子力学Ⅲ』岩波書店  
(1972年)
- 21) 広田修, 『光通信理論 -量子論的考察-』森北出版  
(1985年)
- 22) C.W. Helstrom, "*Quantum Detection and Estimation Theory*", Academic Press, (1976)
- 23) A.S. Holevo, "*Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory*", North-Holland, (1982)
- 24) M. Reed and B. Simon, "*Method of Modern Mathematical Physics Vol.1-4*", Academic Press,(1972, 1975, 1979, 1978)
- 25) R.A. Fisher, "*Statistical method and Scientific Influence*",(1956)  
渋谷他訳:『統計的方法と科学的推論』, 岩波書店  
(1962年)
- 26) 内井惣七, 『科学哲学入門』世界思想社 (1995年)
- 27) J.M. Keynes, "*Treatise on Probability*", Macmillan,  
(1921)  
訳書『確率論』, 東洋経済新報社 (2010年)
- 28) D. Gillice, "*Philosophical Theories of Probability*",  
(2000)  
訳書『確率の哲学理論』, 日本経済評論社 (2004年)
- 29) K. Popper 『科学的発見の論理』上・下 大内他訳 恒星社厚生閣 (1971年)
- 30) K. Popper 『実在論と科学の目的 -ポストスクリプトⅠ』上・下小河原他訳 岩波書店 (2002年)
- 31) K. Popper 『開かれた宇宙 -ポストスクリプトⅡ』  
小河原他訳 岩波書店 (1999年)
- 32) K. Popper 『量子論と物理学の分裂 -ポストスクリプトⅢ』  
小河原他訳 岩波書店 (2003年)