

無理関数の積分

The Integral of Irrational Functions

大石 昌利*

Masatoshi OISHI

Abstract : Triggered by the question of the student, I considered the integral of irrational functions, and found the indefinite integrals of irrational functions $\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ and $\sqrt{f(x)}$ when $f(x)$ is a quadratic function. I also mentioned how mathematics education should be for high school students and first-year students at the Faculty of Science and Technology in the university.

1. はじめに

私は毎年、「微分積分／演習」の授業を担当している。「微分積分」は、理系の大学生が1年生で履修する基礎科目である。本学ではテキストに、石原繁 浅野重初共著「理工系入門 微分積分」(裳華房)を使用している。私はこのテキストを使って4年目であるが、今年ある学生から質問を受けた。その質問が、私にとっては完全な死角に入っていたというか、盲点のような事らについての質問であった。言われてみれば当然のことであるが、今まで思い付かなかったというよりは、考えてみようとしなかった事らについての質問であった。また、いくつかのテキストを調べてみたが、そのことに触れているテキストはひとつもなかった。

テキストに載っている毎年授業で扱う問題でも、多くの人間が考えると、これまで当たり前と思って見過ごしてきたことに気付く者がいる。この問題はこう解くんだと頭から決め込んでいると、全く気付かないことに気付く者がいる。

今回は、そうした学生の質問がきっかけとなって、無理関数の積分についてまとめて考えてみた。

2. 不定積分の計算

私は、「微分積分／演習」の授業の中で、毎年学生に話をしていることがある。

まず、不定積分が計算できる関数、つまり、不定積分が求まる関数は、例外的な関数だということである。

ほとんど関数は、不定積分が求まらない。不定積分が

求まる関数は、関数の中でも例外的な、特殊な関数である。私たちは、その例外的な関数を授業で扱ったり、テストに出題したりしているのである。

また、不定積分の計算は、「窮屈な」計算だということである。不定積分が複数の方法で求まることは少なく、この方法でやるしかないという計算がほとんどである。

例えば、 $\tan x$ の積分は、 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-(\cos x)'}{\cos x}$ と考

えて求めるしかない。それ以外の方法はないであろう。つまり、不定積分の計算は、ただ一本しかない道を、間違えずに進んでいくような計算である。いくつものルートがあるような計算は、そんなに多くはないような気がする。

さらには、不定積分の計算は、大きなくくりでは考えにくい計算だということである。言い換えると、不定積分を求めるには、個別対応が必要だということである。例えば、前述の $\tan x$ の積分と、 $\tan x$ を2乗した $\tan^2 x$ の積分は、全く異なる計算をしなければならない。また、

$\sin x$ の積分と、 $\sin x$ の逆数の関数である $\frac{1}{\sin x}$ の積分

も、全く異なる計算になる。つまり、不定積分の計算は、関数の形がちょっと変わっただけで、全く異なる処理が必要になることが多い。多くの関数に当てはまる「このようにやれば求まる」という法則が作りにくい計算である。

3. 無理関数の積分

3.1 テキストでの扱い

微分積分のテキストには、有理関数の積分という項目は必ずあるが、すべてのテキストが無理関数の積分という項目を設けているわけではない。というのは、無理関数の積分は、基本的にはすべて置換積分の計算だからである。置換積分の項目でいくつかの無理関数の積分を扱えば、あえて単独の項目は設けなくてもよいことになる。

逆に、無理関数の積分という項目があると、無理関数の積分が、いろいろなところにバラバラ出てくるという印象が出てしまう。それは、有理関数の積分についても同じことであるが、つまり、積分の計算は、きっちりと分類して、このような場合にはこのようにやればよいという仕分けがしにくい計算だということである。

学生の質問も、そのような事情から出てきたものである。

3.2 例題についての質問

本学で使用しているテキストには、無理関数の積分の

例として、 $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}}$ が載せられている。解答は、

$\sqrt{\frac{x-1}{2-x}} = t$ とおく方法が紹介されている。他のテキストを見ても、この方法を定石としていることが多い。

この問題に対して、ある学生から「ルートの中を平方完成してできませんか」という質問を受けた。私にとっては、思いもよらない質問であった。

授業では既に、逆三角関数の積分や置換積分法で

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$$

を学び、 $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$ などを練習問題としてやっていたのである。

私としては、ある意味無反省に、 $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$ は逆三角関数の積分、 $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}}$ は無理関数の積分と思い込んでいた。そのため、2つが全く同種の計算であると考えてみることは一度もなかった。だから、学生の質問には、意外という感じがしたし、考えてみればその通りだ、とも思った。

まず、 $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}}$ について考えてみる。

関数の定義域は、 $-x^2+3x-2 > 0$ より

$$1 < x < 2$$

また $\sqrt{-x^2+3x-2} = \sqrt{(x-1)(2-x)}$

$$= \sqrt{\frac{(x-1)(2-x)^2}{2-x}} = (2-x) \sqrt{\frac{x-1}{2-x}}$$

$$\sqrt{\frac{x-1}{2-x}} = t \text{ とおくと } \frac{x-1}{2-x} = t^2 \quad x-1 = 2t^2 - t^2x$$

$$(t^2+1)x = 2t^2+1 \quad x = \frac{2t^2+1}{t^2+1}$$

$$dx = \frac{4t(t^2+1)-(2t^2+1)2t}{(t^2+1)^2} dt = \frac{2t}{(t^2+1)^2} dt$$

$$\begin{aligned} \text{また } \sqrt{-x^2+3x-2} &= (2-x) \sqrt{\frac{x-1}{2-x}} \\ &= \left(2 - \frac{2t^2+1}{t^2+1}\right)t = \frac{t}{t^2+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}} &= \int \frac{t^2+1}{t} \cdot \frac{2t}{(t^2+1)^2} dt \\ &= 2 \int \frac{1}{t^2+1} dt = 2 \tan^{-1} t + C \end{aligned}$$

$$= 2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{x-1}{2-x}} + C \quad \dots \quad 3-(1)$$

$$\text{一方 } -x^2+3x-2 = -(x^2-3x)-2$$

$$= -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

と変形できるから

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2}}$$

$$= \sin^{-1} \frac{x - \frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \sin^{-1}(2x-3) + C \quad \dots \quad 3-(2)$$

計算としては、こちらの方がかなり簡単な計算になる。もちろん、どちらも正しい計算である。ということは、3-(1)と3-(2)は定数の違いだけということになる。それを確認する計算は、**6. B1 グループの不定積分** に一般の場合で示してある。

また、テキストには、かなり作為的な変形をする $\sqrt{\frac{x-1}{2-x}} = t$ とおく方法だけが示されている。そこには、どのような意図が（もしあるとしたら）あるのだろうか。

$$\begin{aligned} \text{注) } \sqrt{-x^2+3x-2} &= \sqrt{(x-1)(2-x)} \\ &= \sqrt{\frac{(x-1)^2(2-x)}{x-1}} = (x-1) \sqrt{\frac{2-x}{x-1}} \end{aligned} \quad \text{だから}$$

$$\sqrt{\frac{2-x}{x-1}} = t \text{ とおくと}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}} = -2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{2-x}{x-1}} + C \quad \dots \quad 3-(3)$$

3-(1)と3-(3)が定数の違いだけであることは、**教育開発センター報告「三角関数と逆三角関数」**で示した。

4. 無理関数の分類

4.1 取扱可能な無理関数

ほとんどの無理関数も、不定積分を求めることはできない。不定積分が求まる無理関数は、無理関数の中でもごく一部の、例外的な関数である。 $\sqrt{f(x)}$, $\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ という

形の無理関数に限定したとしても、 $f(x)$ が三角関数や指数・対数関数のときは、不定積分はまず求まらないであろう。 $f(x)$ が整関数のときでも、 $f(x)$ が3次関数以上だと、処理の施しようがない計算になり、まともな考察の対象にはならないであろう。逆に、 $f(x)$ が1次関数のときは、不定積分はすぐに計算できてしまう。そうすると、考察の対象にできるのは、 $f(x)$ が2次関数のときだけということになるであろう。

また、 $f(x)$ が2次関数のとき、実際に計算をやってみると、 $\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ の方が $\sqrt{f(x)}$ より不定積分がずっと求めやすいことがわかる。一般に、 $\frac{1}{f(x)}$ の不定積分が求まったとしても、同じ方法で逆数の関数 $f(x)$ の不定積分が求まることはほとんどないし、不定積分そのものが求まらないことさえもある。

$f(x)$ が2次関数のときは、関数は $\sqrt{px^2+qx+r}$, $\frac{1}{\sqrt{px^2+qx+r}}$ ということになる。さらに、

$p > 0$ ならば

$$\sqrt{px^2+qx+r} = \sqrt{p} \cdot \sqrt{x^2 + \frac{q}{p}x + \frac{r}{p}}$$

$p < 0$ ならば

$$\sqrt{px^2+qx+r} = \sqrt{-p} \cdot \sqrt{-x^2 - \frac{q}{p}x - \frac{r}{p}}$$

となるから、不定積分としては結局

$\sqrt{x^2+ax+b}$ と $\sqrt{-x^2+ax+b}$ の不定積分と、 $\frac{1}{\sqrt{x^2+ax+b}}$ と $\frac{1}{\sqrt{-x^2+ax+b}}$ の不定積分に帰着できる。以下、積分としては後者の方が求めやすいため、 $\frac{1}{\sqrt{x^2+ax+b}}$ と $\frac{1}{\sqrt{-x^2+ax+b}}$ を A 1 グループ、 $\sqrt{x^2+ax+b}$ と $\sqrt{-x^2+ax+b}$ を A 2 グループと呼んでいく。

4.2 置換積分における無理関数

置換積分においても、無理関数ということは強調しないで扱われる無理関数の積分がある。 $\sqrt{x^2+a^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$, $\sqrt{a^2-x^2}$ や $\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$, $\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$, $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ などの積分がそれである。(以下、これら6つの関数については、常に $a > 0$ とする)

これらについても、 $\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$, $\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$, $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ を

B 1 グループ、 $\sqrt{x^2+a^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$, $\sqrt{a^2-x^2}$ を B 2 グループと呼んでいく。

今回、A 1 から B 2 までのすべての関数の不定積分を求めていく。

4.3 グループの相互関係

A 1 グループ

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+ax+b}}, \frac{1}{\sqrt{-x^2+ax+b}}$$

A 2 グループ

$$\sqrt{x^2+ax+b}, \sqrt{-x^2+ax+b}$$

B 1 グループ

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}, \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}, \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

B 2 グループ

$$\sqrt{x^2+a^2}, \sqrt{x^2-a^2}, \sqrt{a^2-x^2}$$

すべての関数の不定積分を求めていくには、不定積分におけるグループ相互の関係を考えておくとよい。

まず、言うまでもないことだが、B 1, B 2 はそれぞれ A 1, A 2 の特別な場合である。

したがって、A 1, A 2 の不定積分が求まってしまえば、B 1, B 2 の不定積分も求まったことになる。反対に、B 1, B 2 の不定積分が求まってしまえば、A 1, A 2 の不定積分は、それぞれ B 1, B 2 の不定積分に帰着させて求めることができる。

4.4 求め方の方針

私が取った方針は

- (1) A 1 グループの不定積分を求める。A 1 グループの不定積分は比較的求めやすい。
- (2) A 1 グループの不定積分が求まれば、B 1 グループの不定積分は求まったことになる。
- (3) A 2 グループの $\sqrt{-x^2+ax+b}$ の不定積分は求めることができる。
- (4) $\sqrt{-x^2+ax+b}$ の不定積分が求まれば、B 2 グループの $\sqrt{a^2-x^2}$ の不定積分は求まったことになる。
- (5) A 2 グループの $\sqrt{x^2+ax+b}$ の不定積分を求めることは簡単ではない。そこで、B 2 グループの $\sqrt{x^2+a^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$ の不定積分を求める。
- (6) B 2 グループの $\sqrt{x^2+a^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$ の不定積分に帰着させて、 $\sqrt{x^2+ax+b}$ の不定積分を求める。 $\sqrt{x^2+a^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$ の不定積分に帰着させる計算は、2次関数の一番基本的な変形である平方完成である。

また、B 1 と B 2 の不定積分は、一方が求まれば、他方も求まるようになっている。B 1 と B 2 の不定積分を結び付けているのは、部分積分である。

その他、計算を進めていくうちに気付いたいくつかの事からについても、併せて書いていきたい。

5. A 1 グループの不定積分

まず、求めやすい A 1 グループの 2 つの関数の不定積分を求める。

5.1 関数 $\frac{1}{\sqrt{x^2+ax+b}}$ の不定積分

関数 $\frac{1}{\sqrt{x^2+ax+b}}$ は、 $x^2+ax+b > 0$ となる x の値の範囲が必ず存在するから、その範囲で定義される。

テキストでは、 $\frac{1}{\sqrt{x^2+ax+b}}$ の不定積分は

$$\sqrt{x^2+ax+b} = t - x$$

と置いて置換積分する方法が示されている。

$$\sqrt{x^2+ax+b} = t - x \quad \text{とおくと}$$

$$x^2+ax+b = t^2 - 2tx + x^2$$

$$(2t+a)x = t^2 - b \quad x = \frac{t^2-b}{2t+a}$$

$$dx = \frac{2t(2t+a) - (t^2-b)2}{(2t+a)^2} dt = \frac{2(t^2+at+b)}{(2t+a)^2} dt$$

$$\begin{aligned} \text{また } \sqrt{x^2+ax+b} &= t - x \\ &= t - \frac{t^2-b}{2t+a} = \frac{t^2+at+b}{2t+a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+ax+b}} &= \int \frac{2t+a}{t^2+at+b} \cdot \frac{2(t^2+at+b)}{(2t+a)^2} dt \\ &= 2 \int \frac{1}{2t+a} dt = 2 \cdot \frac{1}{2} \log|2t+a| + C \end{aligned}$$

$$= \log|2(x + \sqrt{x^2+ax+b}) + a| + C \quad \dots \quad 5-(1)$$

これ以外の方法で不定積分を求めることもできないわけではないが、それに踏み込むことは、あまり意味あることではないように思われる。

5.2 関数 $\frac{1}{\sqrt{-x^2+ax+b}}$ の不定積分

関数 $\frac{1}{\sqrt{-x^2+ax+b}}$ で、 $-x^2+ax+b > 0$ となる x の値が存在するのは、 $a^2+4b > 0$ のときである。そのとき、方程式 $-x^2+ax+b = 0$ は異なる 2 つの実数解 α, β ($\alpha < \beta$) をもち

$$-x^2+ax+b = -(x-\alpha)(x-\beta)$$

と因数分解できる。 $\frac{1}{\sqrt{-x^2+ax+b}}$ の定義域は $\alpha < x < \beta$

になる。

$$\begin{aligned} \text{このとき } \sqrt{-x^2+ax+b} &= \sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)} \\ &= \sqrt{\frac{(x-\alpha)(\beta-x)^2}{\beta-x}} = (\beta-x) \sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}} \end{aligned}$$

テキストでは、 $\frac{1}{\sqrt{-x^2+ax+b}}$ の不定積分は、 $\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}} = t$ と置いて置換積分する方法が示されている。

$$\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}} = t \quad \text{とおくと} \quad \frac{x-\alpha}{\beta-x} = t^2 \quad x-\alpha = \beta t^2 - t^2 x$$

$$(t^2+1)x = \beta t^2 + \alpha \quad x = \frac{\beta t^2 + \alpha}{t^2+1}$$

$$dx = \frac{2\beta t(t^2+1) - (\beta t^2 + \alpha)2t}{(t^2+1)^2} dt = \frac{2(\beta-\alpha)t}{(t^2+1)^2} dt$$

$$\begin{aligned} \text{また } \sqrt{-x^2+ax+b} &= (\beta-x) \sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}} \\ &= \left(\beta - \frac{\beta t^2 + \alpha}{t^2+1}\right) t = \frac{(\beta-\alpha)t}{t^2+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+ax+b}} &= \int \frac{t^2+1}{(\beta-\alpha)t} \cdot \frac{2(\beta-\alpha)t}{(t^2+1)^2} dt \\ &= 2 \int \frac{1}{t^2+1} dt = 2 \tan^{-1} t + C \\ &= 2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}} + C \end{aligned}$$

さらに $\alpha = \frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}$, $\beta = \frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}$ だから

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}} &= \sqrt{\frac{x - \frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}}{\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2} - x}} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+4b}+2x-a}{\sqrt{a^2+4b}-(2x-a)}} \\ &= \sqrt{\frac{(\sqrt{a^2+4b}+2x-a)^2}{a^2+4b-(2x-a)^2}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{a^2+4b}+2x-a)^2}{4(-x^2+ax+b)}} \\ &= \frac{2x-a+\sqrt{a^2+4b}}{2\sqrt{-x^2+ax+b}} \end{aligned}$$

よって

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+ax+b}} = 2 \tan^{-1} \frac{2x-a+\sqrt{a^2+4b}}{2\sqrt{-x^2+ax+b}} + C \quad \dots \quad 5-(2)$$

6. B 1 グループの不定積分 1

6.1 不定積分の結果

B 1 グループの関数 $\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$, $\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$ や $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$

は、それぞれ $\frac{1}{\sqrt{x^2+ax+b}}$ と $\frac{1}{\sqrt{-x^2+ax+b}}$ の特別な場合である。

$\frac{1}{\sqrt{x^2+ax+b}}$ と $\frac{1}{\sqrt{-x^2+ax+b}}$ の不定積分が求まったの

で、 $\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$, $\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$, $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ の不定積分は、基本

的には解決済みである。

結果をまとめておくと

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+ax+b}} = \log|2(x + \sqrt{x^2+ax+b}) + a| + C \quad \dots \quad 5-(1)$$

で、 $a=0$ 、 $b=a^2$ とおけば

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} &= \log|2(x + \sqrt{x^2+a^2})| + C \\ \text{ただし} \\ \log|2(x + \sqrt{x^2+a^2})| &= \log|x + \sqrt{x^2+a^2}| + \log 2 \\ \text{定数をまとめ、常に } x + \sqrt{x^2+a^2} > 0 \text{ だから} \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} &= \log(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C \quad \dots \quad 6-(1) \end{aligned}$$

同様に、 $a=0$ 、 $b=-a^2$ とおけば、常に

$$\begin{aligned} x + \sqrt{x^2-a^2} > 0 \text{ とは限らないので} \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} &= \log|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C \quad \dots \quad 6-(2) \end{aligned}$$

もちろん 6-(2) は、6-(1) で a^2 を $-a^2$ におき換えたものである。

$$\text{また } \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+ax+b}} = 2 \tan^{-1} \frac{2x-a+\sqrt{a^2+4b}}{2\sqrt{-x^2+ax+b}} + C \quad \dots \quad 5-(2)$$

で、 $a=0$ 、 $b=a^2$ とおけば

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = 2 \tan^{-1} \frac{x+a}{\sqrt{a^2-x^2}} + C \quad \dots \quad 6-(3)$$

B 1 グループの不定積分も、別の置換積分で直接計算してみると、いくつかの興味ある性質を見付けることができる。それらについては、**12. B 1 グループの不定積分 2** に書いてある。

6.2 不定積分の相等

$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ の不定積分は、テキストでは公式

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a} + C \quad \dots \quad 6-(4)$$

としても扱われている。だから、学生の質問にあった

ように、6-(4)を利用して、 $\frac{1}{\sqrt{-x^2+ax+b}}$ の不定積分を

求めることもできる。

$$\begin{aligned} -x^2+ax+b &= -(x^2-ax)+b \\ &= -\left\{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}\right\} + b \\ &= -\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2+4b}{4} \end{aligned}$$

と変形できるから

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+ax+b}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^2 - \left(x-\frac{a}{2}\right)^2}} \\ &= \sin^{-1} \frac{x-\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{a^2+4b}}{2}} + C \\ &= \sin^{-1} \frac{2x-a}{\sqrt{a^2+4b}} + C \quad \dots \quad 6-(5) \end{aligned}$$

5-(2)と6-(5)はちよつと見はかなり違うが、実質は定数の違いであり、積分の答えとしては同じである。

それを示すために、まず、6-(3)と6-(4)が定数の違いだけであることを示す。

逆三角関数の公式 $\sin^{-1} x = 2 \tan^{-1} \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$ より

$$\begin{aligned} \sin^{-1} \frac{x}{a} &= 2 \tan^{-1} \frac{\frac{x}{a}}{1+\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = 2 \tan^{-1} \frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}} \\ &= 2 \tan^{-1} \frac{x(a-\sqrt{a^2-x^2})}{a^2-(a^2-x^2)} = 2 \tan^{-1} \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } 2 \tan^{-1} \frac{x+a}{\sqrt{a^2-x^2}} - \sin^{-1} \frac{x}{a} \\ &= 2 \tan^{-1} \frac{x+a}{\sqrt{a^2-x^2}} - 2 \tan^{-1} \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} \\ &= 2 \left(\tan^{-1} \frac{x+a}{\sqrt{a^2-x^2}} - \tan^{-1} \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} \right) \end{aligned}$$

ここで、逆三角関数の加法定理

$$\tan^{-1} u - \tan^{-1} v = \tan^{-1} \frac{u-v}{1+uv} \quad \text{より}$$

$$\begin{aligned} &= 2 \tan^{-1} \frac{\frac{x+a}{\sqrt{a^2-x^2}} - \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}}{1 + \frac{x+a}{\sqrt{a^2-x^2}} \cdot \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}} \\ &= 2 \tan^{-1} \frac{x(x+a) - \sqrt{a^2-x^2}(a-\sqrt{a^2-x^2})}{x\sqrt{a^2-x^2} + (x+a)(a-\sqrt{a^2-x^2})} \\ &= 2 \tan^{-1} \frac{x^2+ax-a\sqrt{a^2-x^2}+a^2-x^2}{x\sqrt{a^2-x^2}+ax-x\sqrt{a^2-x^2}+a^2-a\sqrt{a^2-x^2}} \\ &= 2 \tan^{-1} \frac{a(x+a-\sqrt{a^2-x^2})}{a(x+a-\sqrt{a^2-x^2})} \\ &= 2 \tan^{-1} 1 = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \quad \dots \quad 6-(6) \end{aligned}$$

以上より、6-(3)と6-(4)は定数の違いだけであることがわかる。

6-(3)と6-(4)は、どちらも正しい結果であるから、定数の違いだけというのは当然のことである。そして、それを確認する計算が、ジグソーパズルの最後のピースがきちんと収まるような、スカッとした感じの計算になる。少し大げさかもしれないが、ドラマチックな感じさえる計算である。

5-(2)と6-(5)が定数の違いだけというのは

$$-x^2 + ax + b = -\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2 + 4b}{4} \quad \text{だから}$$

$$\begin{aligned} & 2 \tan^{-1} \frac{2x-a+\sqrt{a^2+4b}}{2\sqrt{-x^2+ax+b}} - \sin^{-1} \frac{2x-a}{\sqrt{a^2+4b}} \\ &= 2 \tan^{-1} \frac{x-\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{a^2+4b}}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^2 - \left(x-\frac{a}{2}\right)^2}} - \sin^{-1} \frac{x-\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{a^2+4b}}{2}} \end{aligned}$$

この計算は、 $\frac{\sqrt{a^2+4b}}{2}$, $x - \frac{a}{2}$ をそれぞれ a , x とおけば 6-(6) の計算であり、5-(2) と 6-(5) も定数の違いだけであることがわかる。

7. A2 グループの不定積分 1

7.1 関数 $\sqrt{x^2+ax+b}$ の不定積分

関数 $\frac{1}{\sqrt{x^2+ax+b}}$ の場合と同様に、 $\sqrt{x^2+ax+b} = t - x$ において置換積分をしてみる。

$$dx = \frac{2(t^2+at+b)}{(2t+a)^2} dt, \quad \sqrt{x^2+ax+b} = \frac{t^2+at+b}{2t+a}$$

$$\begin{aligned} \text{だから } \int \sqrt{x^2+ax+b} dx &= \int \frac{t^2+at+b}{2t+a} \cdot \frac{2(t^2+at+b)}{(2t+a)^2} dt \\ &= \int \frac{2(t^2+at+b)^2}{(2t+a)^3} dt \quad \dots \quad 7-(1) \end{aligned}$$

この積分を求めるには、割り算をしてから部分分数分解を考えていくしかないであろうが、決して容易な計算ではない。

7.2 関数 $\sqrt{-x^2+ax+b}$ の不定積分

$a^2 + 4b > 0$ のとき、方程式 $-x^2 + ax + b = 0$ の異なる 2 つの実数解を α , β ($\alpha < \beta$) とすると、
 $-x^2 + ax + b = -(x - \alpha)(x - \beta)$ となり、関数の定義域は $a < x < \beta$ である。

関数 $\frac{1}{\sqrt{-x^2+ax+b}}$ の場合と同様に、 $\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}} = t$ において置換積分をしてみる。

$$dx = \frac{2(\beta-\alpha)t}{(t^2+1)^2} dt, \quad \sqrt{-x^2+ax+b} = \frac{(\beta-\alpha)t}{t^2+1}$$

$$\begin{aligned} \text{だから } \int \sqrt{-x^2+ax+b} dx &= \int \frac{(\beta-\alpha)t}{t^2+1} \cdot \frac{2(\beta-\alpha)t}{(t^2+1)^2} dt \\ &= 2(\beta-\alpha)^2 \int \frac{t^2}{(t^2+1)^3} dt \end{aligned}$$

この積分を求めるには、さらに、 $t = \tan \theta$ ($-\frac{\pi}{2} < \theta <$

$$\frac{\pi}{2}) \text{ において } dx = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$$

$$t^2 + 1 = \tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad \text{より}$$

$$\frac{t^2}{(t^2+1)^3} = \tan^2 \theta \cos^6 \theta = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \cos^6 \theta = \sin^2 \theta \cos^4 \theta$$

よって

$$\begin{aligned} \int \frac{t^2}{(t^2+1)^3} dt &= \int \sin^2 \theta \cos^4 \theta \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \int \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int \sin^2 2\theta d\theta \\ &= \frac{1}{8} \int (1 - \cos 4\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{8} \left(\theta - \frac{1}{4} \sin 4\theta \right) + C \end{aligned}$$

$$\text{ここで } \theta = \tan^{-1} t = \tan^{-1} \sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{1+\tan^2 \theta} = \frac{1}{1+t^2} \quad \text{より}$$

$$\frac{1}{4} \sin 4\theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta \cos 2\theta = \sin \theta \cos \theta \cos 2\theta$$

$$= \tan \theta \cos^2 \theta (2 \cos^2 \theta - 1)$$

$$= t \cdot \frac{1}{1+t^2} \left(\frac{2}{1+t^2} - 1 \right) = \frac{t}{1+t^2} \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}}}{1+\frac{x-\alpha}{\beta-x}} \cdot \frac{1-\frac{x-\alpha}{\beta-x}}{1+\frac{x-\alpha}{\beta-x}}$$

$$= \frac{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}{\beta-x+x-\alpha} \cdot \frac{\beta-x-x+\alpha}{\beta-x+x-\alpha}$$

$$= \frac{(\alpha+\beta-2x)\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}{(\beta-\alpha)^2}$$

$$= \frac{(\alpha+\beta-2x)\sqrt{-x^2+ax+b}}{(\beta-\alpha)^2}$$

$$\text{よって } \int \sqrt{-x^2+ax+b} dx$$

$$= 2(\beta-\alpha)^2 \cdot \frac{1}{8} \left\{ \tan^{-1} \sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}} - \frac{(\alpha+\beta-2x)\sqrt{-x^2+ax+b}}{(\beta-\alpha)^2} \right\} + C$$

$$= \frac{(\beta-\alpha)^2}{4} \tan^{-1} \sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}} + \frac{2x-(\alpha+\beta)}{4} \sqrt{-x^2+ax+b} + C$$

$$\text{さらに } \alpha = \frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}, \quad \beta = \frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2} \quad \text{だから}$$

$$\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}} = \frac{2x-a+\sqrt{a^2+4b}}{2\sqrt{-x^2+ax+b}}$$

$$\alpha + \beta = a, \quad (\beta - \alpha)^2 = a^2 + 4b$$

$$\text{以上より } \int \sqrt{-x^2+ax+b} dx$$

$$\begin{aligned} &= \frac{a^2+4b}{4} \tan^{-1} \frac{2x-a+\sqrt{a^2+4b}}{2\sqrt{-x^2+ax+b}} \\ &\quad + \frac{2x-a}{4} \sqrt{-x^2+ax+b} + C \quad \dots \quad 7-(2) \end{aligned}$$

関数 $\sqrt{x^2+ax+b}$ は、 a , b の値に関係なく定義域を定めることができる。しかし、関数 $\sqrt{-x^2+ax+b}$ は、

$a^2 + 4b > 0$ のときしか定義域を定めることができない。そして、まさにその条件によって、 $\sqrt{-x^2 + ax + b}$ の不定積分が計算できる形になってくれるのである。

数学では、条件をひとつひとつ付けて得られる結果は、とても美しいとは言えない。一切の付帯条件を必要としない「三角形の内角の和は 180° である」という定理が、なんと神々しい美しさを放っていることか。しかし、多くの場合は、全く付帯条件が付かないと、取り付く島もなくなってしまう。 $\sqrt{x^2 + ax + b}$ には、 a, b に条件を付けなくてもよいから、それでかえって、積分計算が付け入る隙のないものになってしまっているのである。

8. 関数 $\sqrt{x^2 + a^2}$ の不定積分

次は、B2 グループ $\sqrt{x^2 + a^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$, $\sqrt{a^2 - x^2}$ の不定積分について考えていく。これらの関数は、無理関数の積分というより、置換積分の問題として扱われることが多い。

まず、関数 $\sqrt{x^2 + a^2}$ の不定積分を求める。

$\sqrt{x^2 + a^2}$ の不定積分を置換積分で考えるときは、

$x = a \tan \theta$ ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$) とおくのが一般的である。

$x = a \tan \theta$ ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$) とおくと、 $dx = \frac{a}{\cos^2 \theta} d\theta$

$$\begin{aligned} \text{また } \sqrt{x^2 + a^2} &= \sqrt{a^2 \tan^2 \theta + a^2} = \sqrt{a^2(1 + \tan^2 \theta)} \\ &= \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 \theta}} = \left| \frac{a}{\cos \theta} \right| = \frac{a}{\cos \theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } \int \sqrt{x^2 + a^2} dx &= \int \frac{a}{\cos \theta} \cdot \frac{a}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= a^2 \int \frac{d\theta}{\cos^3 \theta} = a^2 \int \frac{\cos \theta}{\cos^4 \theta} d\theta = a^2 \int \frac{\cos \theta}{(1 - \sin^2 \theta)^2} d\theta \end{aligned}$$

ここで $\sin \theta = t$ とおくと $\cos \theta d\theta = dt$ より

$$a^2 \int \frac{\cos \theta}{(1 - \sin^2 \theta)^2} d\theta = a^2 \int \frac{dt}{(1 - t^2)^2} = a^2 \int \frac{dt}{(1+t)^2(1-t)^2}$$

$\frac{1}{(1+t)^2(1-t)^2}$ を部分分数に分解すると

$$\frac{1}{(1+t)^2(1-t)^2} = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} + \frac{1}{(t+1)^2} + \frac{1}{(t-1)^2} \right\} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} a^2 \int \frac{dt}{(1+t)^2(1-t)^2} &= \frac{a^2}{4} \int \left\{ \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} + \frac{1}{(t+1)^2} + \frac{1}{(t-1)^2} \right\} dt \\ &= \frac{a^2}{4} \left(\log|t+1| - \log|t-1| - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} \right) + C \end{aligned}$$

$$= \frac{a^2}{4} \left(\log \left| \frac{t+1}{t-1} \right| - \frac{2t}{t^2-1} \right) + C$$

$$= \frac{a^2}{4} \left(\log \left| \frac{\sin \theta + 1}{\sin \theta - 1} \right| - \frac{2 \sin \theta}{\sin^2 \theta - 1} \right) + C$$

$$= \frac{a^2}{4} \left(\log \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} + \frac{2 \sin \theta}{\cos^2 \theta} \right) + C$$

さらに $x = a \tan \theta$ ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$) より $\cos \theta > 0$ で

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 \theta}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$\sin \theta = \cos \theta \tan \theta = \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}} \cdot \frac{x}{a} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$\frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}}{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}} = \frac{\sqrt{x^2 + a^2} - x}{\sqrt{x^2 + a^2} + x} = \frac{(x + \sqrt{x^2 + a^2})^2}{a^2}$$

$$= \left(\frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a} \right)^2$$

$$\frac{2 \sin \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{2 \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}}{\left(\frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right)^2} = \frac{2x\sqrt{x^2 + a^2}}{a^2}$$

よって $\frac{a^2}{4} \left(\log \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} + \frac{2 \sin \theta}{\cos^2 \theta} \right)$

$$= \frac{a^2}{4} \left\{ \log \left(\frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a} \right)^2 + \frac{2x\sqrt{x^2 + a^2}}{a^2} \right\}$$

$$= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \log \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a}$$

ここで $\log \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a} = \log(x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \log a$

であるから、定数をまとめて C とすれば

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + a^2} dx &= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \log(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C \quad \cdots \quad 8-(1) \end{aligned}$$

また、 $\sqrt{x^2 + a^2}$ の不定積分の計算は、 $\sqrt{x^2 + ax + b} = t - x$ において $\sqrt{x^2 + ax + b}$ の不定積分を求めた計算

で、 $a = 0$, $b = a^2$ とおいたものである。

よって、7-(1)より

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \int \frac{2(t^2 + a^2)^2}{(2t)^3} dt = \int \frac{t^4 + 2a^2 t^2 + a^4}{4t^3} dt$$

となる。この計算は、かなりやりやすい計算である。

$$\int \frac{t^4 + 2a^2 t^2 + a^4}{4t^3} dt = \frac{1}{4} \int \left(t + \frac{2a^2}{t} + a^4 t^{-3} \right) dt$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} t^2 + 2a^2 \log|t| - \frac{a^4}{2} \cdot \frac{1}{t^2} \right) + C$$

$$= \frac{1}{8} t^2 + \frac{a^2}{2} \log|t| - \frac{a^4}{8t^2} + C$$

$$= \frac{1}{8}(x + \sqrt{x^2 + a^2})^2 + \frac{a^2}{2} \log|x + \sqrt{x^2 + a^2}|$$

$$- \frac{a^4}{8(x + \sqrt{x^2 + a^2})^2} + C$$

ここで $(x + \sqrt{x^2 + a^2})^2 - \frac{a^4}{(x + \sqrt{x^2 + a^2})^2}$

$$= 2x^2 + a^2 + 2x\sqrt{x^2 + a^2} - \frac{a^4}{2x^2 + a^2 + 2x\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$= 2x^2 + a^2 + 2x\sqrt{x^2 + a^2} - \frac{a^4(2x^2 + a^2 - 2x\sqrt{x^2 + a^2})}{(2x^2 + a^2)^2 - 4x^2(x^2 + a^2)}$$

$$= 2x^2 + a^2 + 2x\sqrt{x^2 + a^2} - \frac{a^4(2x^2 + a^2 - 2x\sqrt{x^2 + a^2})}{a^4}$$

$$= 4x\sqrt{x^2 + a^2}$$

以上より

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx$$

$$= \frac{1}{8} \cdot 4x\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \log(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$$

$$= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \log(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$$

となり、8-(1)と同じ結果になる。

9. 関数 $\sqrt{x^2 - a^2}$ の不定積分

次に、B2 グループ $\sqrt{x^2 - a^2}$ の不定積分を求める。

$\sqrt{x^2 - a^2}$ の不定積分は、

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx$$

$$= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \log(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C \quad \dots \quad 8-(1)$$

で、 a^2 を $-a^2$ におき換えれば求まる。

ただし、常に $x + \sqrt{x^2 + a^2} > 0$ であるが、常に $x - \sqrt{x^2 - a^2} > 0$ とは限らないので

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx$$

$$= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \log|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C \quad \dots \quad 9-(1)$$

となる。

置換積分で考えるときは、 $x = \frac{a}{\cos \theta}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$, $\theta \neq$

$\frac{\pi}{2}$) とおくのが一般的である。

$$x = \frac{a}{\cos \theta} \quad (0 \leq \theta \leq \pi, \theta \neq \frac{\pi}{2}) \quad \text{とおくと}$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 \theta} - a^2} = \sqrt{a^2 \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} - 1 \right)}$$

$$= \sqrt{a^2 \tan^2 \theta} = a |\tan \theta|$$

$$dx = \frac{a \sin \theta}{\cos^2 \theta} d\theta$$

関数の定義域を考えると $x^2 - a^2 \geq 0$

$$(x + a)(x - a) \geq 0 \quad x \leq -a, \quad a \leq x \quad \text{より}$$

$$\frac{a}{\cos \theta} \leq -a, \quad a \leq \frac{a}{\cos \theta}$$

よって

$$\frac{1}{\cos \theta} \leq -1 \quad \text{のとき} \quad -1 \leq \cos \theta < 0$$

$$1 \leq \frac{1}{\cos \theta} \quad \text{のとき} \quad 0 < \cos \theta \leq 1$$

(i) $0 < \cos \theta \leq 1$ つまり $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき

$$a |\tan \theta| = a \tan \theta \quad \text{より}$$

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \int a \tan \theta \cdot \frac{a \sin \theta}{\cos^2 \theta} d\theta = \int \frac{a^2 \sin^2 \theta}{\cos^3 \theta} d\theta$$

$$= a^2 \int \frac{\sin^2 \theta \cos \theta}{\cos^4 \theta} d\theta$$

$$= a^2 \int \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \sin^2 \theta)^2} \cdot \cos \theta d\theta$$

ここで $\sin \theta = t$ とおくと $\cos \theta d\theta = dt$ より

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = a^2 \int \frac{t^2}{(1 - t^2)^2} dt = a^2 \int \frac{t^2}{(1 + t)^2 (1 - t)^2} dt$$

これ以降の計算は、8. 関数 $\sqrt{x^2 + a^2}$ の不定積分

の $\int \frac{dt}{(1+t)^2(1-t)^2}$ の計算とほぼ同じで

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx$$

$$= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{a^2}{2} \log|x - \sqrt{x^2 - a^2}| + C \quad \dots \quad 9-(2)$$

となる。

$$\text{ここで} \quad \log|x - \sqrt{x^2 - a^2}| = -\log \frac{1}{|x - \sqrt{x^2 - a^2}|}$$

$$= -\log \frac{|x + \sqrt{x^2 - a^2}|}{a^2}$$

であるから、定数をまとめれば、9-(2)は

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx$$

$$= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \log|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

となり、9-(1)と同じ結果になる。

(ii) $-1 \leq \cos \theta < 0$ つまり $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$ のとき

$$a |\tan \theta| = -a \tan \theta$$

また、 $x = \frac{a}{\cos \theta}$ で、 $x < 0$, $\sin \theta \geq 0$ となることに注

意すれば、9-(1)と同じ結果

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx$$

$$= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \log|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

になる。

また, $\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{(x+a)(x-a)}$ と変形できるから,
 $\frac{1}{\sqrt{-x^2+ax+b}}$ の不定積分を, $\sqrt{\frac{x-a}{\beta-x}} = t$ とおいて置換積分
 した方法も利用できる。

$\sqrt{x^2 - a^2}$ の定義域は $x \leq -a$, $a \leq x$ である。
 (i) $x \geq a$ のとき

$x+a > 0$, $x-a \geq 0$ となり

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{(x+a)^2 \cdot \frac{x-a}{x+a}} = (x+a) \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$$

る。そこで, $\sqrt{\frac{x-a}{x+a}} = t$ とおいて置換積分をしてみる。

$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+ax+b}}$ の計算と同じような計算であるが

$$\frac{x-a}{x+a} = t^2 \quad x-a = t^2 x + at^2$$

$$(1-t^2)x = a(1+t^2) \quad x = \frac{a(1+t^2)}{1-t^2}$$

$$dx = a \cdot \frac{2t(1-t^2) - (1+t^2)(-2t)}{(1-t^2)^2} dt = \frac{4at}{(1-t^2)^2} dt$$

$$\begin{aligned} \text{また } \sqrt{x^2 - a^2} &= (x+a) \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} \\ &= \left\{ \frac{a(1+t^2)}{1-t^2} + a \right\} t = \frac{2at}{1-t^2} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 - a^2} dx &= \int \frac{2at}{1-t^2} \cdot \frac{4at}{(1-t^2)^2} dt = 8a^2 \int \frac{t^2}{(1-t^2)^3} dt \\ &= 8a^2 \int \frac{t^2}{(1+t)^3(1-t)^3} dt \end{aligned}$$

$\frac{t^2}{(1+t)^3(1-t)^3}$ を部分分数に分解すると

$$\begin{aligned} \frac{t^2}{(1+t)^3(1-t)^3} &= -\frac{1}{16} \left\{ \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} + \frac{1}{(1+t)^2} + \frac{1}{(1-t)^2} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{8} \left\{ \frac{1}{(1+t)^3} + \frac{1}{(1-t)^3} \right\} \end{aligned}$$

よって $\int \sqrt{x^2 - a^2} dx =$

$$\begin{aligned} &-\frac{a^2}{2} \left(\log|1+t| - \log|1-t| - \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) \\ &+ a^2 \left\{ -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1+t)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1-t)^2} \right\} + C \end{aligned}$$

$$= \frac{a^2}{2} \left(\log|1-t| - \log|1+t| - \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} + \frac{1}{(1-t)^2} - \frac{1}{(1+t)^2} \right) + C$$

$$= \frac{a^2}{2} \left(\log \left| \frac{1-t}{1+t} \right| - \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} + \frac{1}{(1-t)^2} - \frac{1}{(1+t)^2} \right) + C$$

ここで

$$\left| \frac{1-t}{1+t} \right| = \left| \frac{1 - \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}}{1 + \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}} \right| = \left| \frac{\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a}} \right| = \left| \frac{x - \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right| = \frac{|x - \sqrt{x^2 - a^2}|}{a}$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} &= \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}} - \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}} = \frac{\sqrt{x+a}}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a}} - \frac{\sqrt{x+a}}{\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a}} \\ &= \sqrt{x+a} \left(-\frac{\sqrt{x-a}}{a} \right) = -\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-t)^2} - \frac{1}{(1+t)^2} &= \frac{1}{\left(1 - \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\right)^2} - \frac{1}{\left(1 + \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\right)^2} \\ &= \frac{x+a}{(\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a})^2} - \frac{x+a}{(\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a})^2} \\ &= \frac{x+a}{2} \left(\frac{1}{x - \sqrt{x^2 - a^2}} - \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \right) \\ &= \frac{x+a}{2} \cdot \frac{2\sqrt{x^2 - a^2}}{a^2} = \frac{(x+a)\sqrt{x^2 - a^2}}{a^2} \end{aligned}$$

以上より

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 - a^2} dx &= \frac{a^2}{2} \left(\log \left| \frac{x - \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right| - \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} + \frac{(x+a)\sqrt{x^2 - a^2}}{a^2} \right) + C \\ &= \frac{a^2}{2} \left(\log \left| \frac{x - \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right| + \frac{x\sqrt{x^2 - a^2}}{a^2} \right) + C \\ &= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{a^2}{2} \log \left| \frac{x - \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right| + C \end{aligned}$$

定数をまとめれば

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{a^2}{2} \log|x - \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

これは 9-(2) だから, 結局 9-(1) と同じ結果になる。

ここでも因数分解できるかどうか, 不定積分を求め
 る上で, 大きな違いとなっていて表れてきているのである。

(ii) $x \leq -a$ のとき

$x+a \leq 0$, $x-a < 0$ だから

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{(x-a)^2 \cdot \frac{x+a}{x-a}} = (a-x) \sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$$

$$\sqrt{\frac{x+a}{x-a}} = t \text{ とおくと } x = \frac{a(t^2+1)}{t^2-1} \quad dx = -\frac{4at}{(t^2-1)^2} dt$$

$$\text{また } \sqrt{x^2 - a^2} = (a-x) \sqrt{\frac{x+a}{x-a}} = -\frac{2at}{t^2-1}$$

よって

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \int \left(-\frac{2at}{t^2-1} \right) \left\{ -\frac{4at}{(t^2-1)^2} \right\} dt$$

$$= 8a^2 \int \frac{t^2}{(t^2-1)^3} dt$$

$$= -8a^2 \int \frac{t^2}{(1+t)^3(1-t)^3} dt$$

$\frac{t^2}{(1+t)^3(1-t)^3}$ を部分分数に分解し, (i) の場合と同様

の計算をして

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 - a^2} dx &= \frac{a^2}{2} \left(\log \left| \frac{1+t}{1-t} \right| - \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} + \frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{(1-t)^2} \right) + C \end{aligned}$$

ここで $x+a \leq 0$, $x-a < 0$ に注意して

$$\begin{aligned} \left| \frac{1+t}{1-t} \right| &= \left| \frac{1+\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}}{1-\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}} \right| = \left| \frac{1+\sqrt{\frac{-(x-a)}{-(x-a)}}}{1-\sqrt{\frac{-(x-a)}{-(x-a)}}} \right| = \left| \frac{\sqrt{-(x-a)}+\sqrt{-(x-a)}}{\sqrt{-(x-a)}-\sqrt{-(x-a)}} \right| \\ &= \left| -\frac{x-\sqrt{x^2-a^2}}{a} \right| = \frac{|x-\sqrt{x^2-a^2}|}{a} \end{aligned}$$

$$\text{同様に } -\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$$

$$\frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{(1-t)^2} = \frac{(x-a)\sqrt{x^2-a^2}}{a^2}$$

以上より

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2-a^2} dx &= \frac{a^2}{2} \left(\log \frac{|x-\sqrt{x^2-a^2}|}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a} + \frac{(x-a)\sqrt{x^2-a^2}}{a^2} \right) + C \\ &= \frac{a^2}{2} \left(\log \frac{|x-\sqrt{x^2-a^2}|}{a} + \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{a^2} \right) + C \\ &= \frac{x}{2} \sqrt{x^2-a^2} + \frac{a^2}{2} \log \frac{|x-\sqrt{x^2-a^2}|}{a} + C \\ &= \frac{x}{2} \sqrt{x^2-a^2} + \frac{a^2}{2} \log |x-\sqrt{x^2-a^2}| + C \end{aligned}$$

これも 9-(2) だから、いずれの場合も

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2-a^2} dx &= \frac{x}{2} \sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2} \log |x+\sqrt{x^2-a^2}| + C \end{aligned}$$

となる。

以上のように、 $\sqrt{x^2-a^2}$ の不定積分は、 $\sqrt{x^2-a^2} = t-x$ とおく置換積分も含めて、3通りの方法で求めることができる。不定積分は、ただ1通りの方法で求めるしかないことが多い。私の知る限りでは、3通りの方法で求められる計算というのは、けっこう珍しいケースのような気がする。

10. 関数 $\sqrt{a^2-x^2}$ の不定積分

最後に、B2グループ $\sqrt{a^2-x^2}$ の不定積分を求める。 $\sqrt{a^2-x^2}$ については、 $\sqrt{-x^2+ax+b}$ の不定積分が求まっているので、基本的には解決済みである。つまり

$$\begin{aligned} \int \sqrt{-x^2+ax+b} dx &= \frac{a^2+4b}{4} \tan^{-1} \frac{2x-a+\sqrt{a^2+4b}}{2\sqrt{-x^2+ax+b}} + \frac{2x-a}{4} \sqrt{-x^2+ax+b} + C \\ &\dots \quad 7-(2) \end{aligned}$$

で、 $a=0$, $b=a^2$ とおけば

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2-x^2} dx &= a^2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{x+a}{a-x}} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + C \quad \dots \quad 10-(1) \end{aligned}$$

また、 $\sqrt{a^2-x^2}$ の不定積分を置換積分で考えるときは、 $x=a \sin \theta$ ($-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) とおくのが一般的である。

$$x=a \sin \theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{とおくと} \quad dx=a \cos \theta d\theta$$

$$\begin{aligned} \text{また } \sqrt{a^2-x^2} &= \sqrt{a^2-a^2 \sin^2 \theta} = \sqrt{a^2(1-\sin^2 \theta)} \\ &= \sqrt{a^2 \cos^2 \theta} = |a \cos \theta| = a \cos \theta \end{aligned}$$

$$\text{よって } \int \sqrt{a^2-x^2} dx = \int a \cos \theta \cdot a \cos \theta d\theta$$

$$= a^2 \int \cos^2 \theta d\theta = a^2 \int \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2} \left(\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) + C$$

$$\text{ここで } \sin \theta = \frac{x}{a} \text{ より } \theta = \sin^{-1} \frac{x}{a}$$

$$\text{また } \cos \theta = \sqrt{1-\sin^2 \theta} = \sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} \text{ より}$$

$$\frac{1}{2} \sin 2\theta = \sin \theta \cos \theta = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}$$

$$\text{よって } \int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{a^2}{2} \left(\sin^{-1} \frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2} \right) + C$$

$$= \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + C \quad \dots \quad 10-(2)$$

10-(1)と10-(2)も、定数の違いだけである。(6-(6)と同じ計算)

11. B2グループの不定積分

B2グループ $\sqrt{x^2+a^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$, $\sqrt{a^2-x^2}$ の不定積分は、部分積分を使って、それぞれB1グループ

$\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$, $\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$, $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ の不定積分に帰着させることもできる。つまり、B1グループとB2グループの不定積分は、一方が求まれば、他方も求まることになる。

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2+a^2} dx &= x\sqrt{x^2+a^2} - \int x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}} dx \\ &= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}} dx \\ &= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2+a^2-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}} dx \\ &= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \left(\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}} \right) dx \text{ より} \end{aligned}$$

$$2 \int \sqrt{x^2+a^2} dx = x\sqrt{x^2+a^2} + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$\text{よって } \int \sqrt{x^2+a^2} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2+a^2} + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} \right)$$

$$\text{同様に } \int \sqrt{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2-a^2} - a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} \right)$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \right)$$

これらの式は、関数が $\sqrt{x^2+a^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$, $\sqrt{a^2-x^2}$ だから成り立つ、これらの関数に特有な、これらの関数の個性のような性質である。

これらの式に、6. B 1 グループの不定積分 1 に示した結果を代入すれば、すでに得られた結果と一致する。

12. B 1 グループの不定積分 2

B 1 グループ $\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$, $\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$, $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ の不定積分はすべて求まっている。しかし、B 2 グループ $\sqrt{x^2+a^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$, $\sqrt{a^2-x^2}$ の不定積分を求めた置換積分を使うと、多少意味ある計算が出てくることもある。ここではそれらについて、落ち穂拾い的に書いていく。

12.1 関数 $\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$ の不定積分

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \log(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C \quad \dots \quad 6-(1)$ である。

いま、 $x = a \tan \theta$ ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$) とおくと

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} &= \int \frac{\cos \theta}{a} \cdot \frac{a}{\cos^2 \theta} d\theta = \int \frac{d\theta}{\cos \theta} = \int \frac{\cos \theta}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \int \frac{\cos \theta}{1-\sin^2 \theta} d\theta \end{aligned}$$

$\sin \theta = t$ とおくと $\cos \theta d\theta = dt$ より

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos \theta}{1-\sin^2 \theta} d\theta &= \int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} (\log|1+t| - \log|1-t|) + C \\ &= \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+\sin \theta}{1-\sin \theta} \right| + C \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{1+\sin \theta}{1-\sin \theta} + C \end{aligned}$$

$$\text{ここで } \frac{1+\sin \theta}{1-\sin \theta} = \frac{(1+\sin \theta)^2}{1-\sin^2 \theta} = \frac{(1+\sin \theta)^2}{\cos^2 \theta} = \left(\frac{1+\sin \theta}{\cos \theta} \right)^2$$

$$\text{より } \frac{1}{2} \log \frac{1+\sin \theta}{1-\sin \theta} = \log \frac{1+\sin \theta}{\cos \theta} = \log \left(\tan \theta + \frac{1}{\cos \theta} \right)$$

また $\cos \theta > 0$ だから

$$\frac{1}{\cos \theta} = \sqrt{1 + \tan^2 \theta} = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{a} \right)^2} = \frac{1}{a} \sqrt{x^2 + a^2}$$

よって

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \log \frac{1+\sin \theta}{1-\sin \theta} &= \log \left(\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a} \right) = \log \left(\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a} \right) \\ &= \log(x + \sqrt{x^2+a^2}) - \log a \end{aligned}$$

以上より、 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \log(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C$ となり、

同じ結果が得られた。

12.2 関数 $\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$ の不定積分

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C \quad \dots \quad 6-(2) \quad \text{である。}$$

$$x = \frac{a}{\cos \theta} \quad (0 \leq \theta \leq \pi, \theta \neq \frac{\pi}{2}) \quad \text{とおくと}$$

(i) $0 < \cos \theta \leq 1$ つまり $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{1}{a \tan \theta} \cdot \frac{a \sin \theta}{\cos^2 \theta} d\theta = \int \frac{d\theta}{\cos \theta}$$

この計算は、1) に現れた計算である。

(ii) $-1 \leq \cos \theta < 0$ つまり $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$ のときも、同様の計算になる。

また、 $\sqrt{\frac{x-a}{x+a}} = t$ においても、既に現れた計算と同じような計算になる。

12.3 関数 $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ の不定積分

$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ の不定積分は、通常テキストでは、 $\sin^{-1} x$ の微分から求めていく。

いま、 $x = a \sin \theta$ ($-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) とおくと

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} &= \int \frac{1}{a \cos \theta} \cdot a \cos \theta d\theta = \int d\theta = \theta + C \\ &= \sin^{-1} \frac{x}{a} + C \end{aligned}$$

となり、同じ結果が得られる。

13. A 2 グループの不定積分 2

再び、関数 $\sqrt{x^2+ax+b}$ と $\sqrt{-x^2+ax+b}$ の不定積分を考える。

13.1 関数 $\sqrt{x^2+ax+b}$ の不定積分

$\sqrt{x^2+ax+b} = t - x$ において置換積分しても、有効な計算にはならなかった。(7-(1))

そこで、 $\sqrt{x^2+a^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$ の不定積分の結果

$$\int \sqrt{x^2+a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2} \log(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C \quad \dots \quad 8-(1)$$

$$\int \sqrt{x^2-a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2} \log|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C \quad \dots \quad 9-(1)$$

に帰着させ、求めていく。

$$x^2 + ax + b = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2-4b}{4} \quad \text{より} \quad -\frac{a^2-4b}{4} = p$$

とにおいて

$$p > 0 \text{ のとき } x^2 + ax + b = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + (\sqrt{p})^2$$

$$p < 0 \text{ のとき } x^2 + ax + b = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - (\sqrt{-p})^2$$

と変形できるから

$p > 0$ のとき, 8-(1)より

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + ax + b} dx &= \int \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + (\sqrt{p})^2} dx \\ &= \frac{x + \frac{a}{2}}{2} \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + (\sqrt{p})^2} \\ &\quad + \frac{(\sqrt{p})^2}{2} \log \left(x + \frac{a}{2} + \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + (\sqrt{p})^2} \right) + C \\ &= \frac{2x+a}{4} \sqrt{x^2 + ax + b} \\ &\quad - \frac{a^2-4b}{8} \log \left(x + \frac{a}{2} + \sqrt{x^2 + ax + b} \right) + C \end{aligned}$$

... 13-(1)

$p < 0$ のとき, 9-(1)より

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + ax + b} dx &= \int \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - (\sqrt{-p})^2} dx \\ &= \frac{x + \frac{a}{2}}{2} \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - (\sqrt{-p})^2} \\ &\quad - \frac{(\sqrt{-p})^2}{2} \log \left(x + \frac{a}{2} + \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - (\sqrt{-p})^2} \right) + C \\ &= \frac{2x+a}{4} \sqrt{x^2 + ax + b} \\ &\quad - \frac{a^2-4b}{8} \log \left(x + \frac{a}{2} + \sqrt{x^2 + ax + b} \right) + C \end{aligned}$$

となり, $p > 0$ のときと同じ結果になる。

つまり, p の値に関係なく 13-(1) は成り立つ。

もちろん理屈の上では, $\sqrt{x^2 + a^2}$ や $\sqrt{x^2 - a^2}$ の不

定積分を求めた置換 ($x + \frac{a}{2} = \sqrt{p} \tan \theta$ や $x + \frac{a}{2} =$

$$\frac{\sqrt{-p}}{\cos \theta}, \quad \frac{\sqrt{x + \frac{a}{2} - \sqrt{-p}}}{x + \frac{a}{2} + \sqrt{-p}} = t \text{ など}) \text{ を使えば, } \sqrt{x^2 + ax + b}$$

つまり $\sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + (\sqrt{p})^2}$ や $\sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - (\sqrt{-p})^2}$ の不

定積分も直接計算することができる。しかし, それら

も, $\sqrt{x^2 + a^2}$ や $\sqrt{x^2 - a^2}$ の不定積分を求めてしまえば, 全く同じ内容の計算であり, ほとんど意味のないものである。

13.2 関数 $\sqrt{-x^2 + ax + b}$ の不定積分

関数が定義されるのは $a^2 + 4b > 0$ のときである。

$\sqrt{-x^2 + ax + b}$ の不定積分は求まっている (7-(2))

ので, $\sqrt{a^2 - x^2}$ の不定積分

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

に帰着させる必要はないが, 帰着させれば,

$$-x^2 + ax + b = -\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2+4b}{4} \text{ より}$$

$$\frac{a^2+4b}{4} = q \text{ とおくと, } q > 0 \text{ で}$$

$$-x^2 + ax + b = -\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + (\sqrt{q})^2$$

と変形できるから

$$\begin{aligned} \int \sqrt{-x^2 + ax + b} dx &= \int \sqrt{(\sqrt{q})^2 - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \left\{ (\sqrt{q})^2 \sin^{-1} \frac{x - \frac{a}{2}}{\sqrt{q}} + \left(x - \frac{a}{2}\right) \sqrt{(\sqrt{q})^2 - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2} \right\} + C \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{a^2+4b}{4} \sin^{-1} \frac{2x-a}{\sqrt{a^2+4b}} + \left(x - \frac{a}{2}\right) \sqrt{-x^2 + ax + b} \right\} + C \\ &= \frac{a^2+4b}{8} \sin^{-1} \frac{2x-a}{\sqrt{a^2+4b}} + \frac{2x-a}{4} \sqrt{-x^2 + ax + b} + C \end{aligned}$$

... 13-(2)

となる。

5-(2) と 6-(5) が定数の違いだけであるので, 13-(2) も 7-(2) と定数の違いだけになる。

14. まとめ

最後に, 主要な4つの不定積分について, 結果をまとめておく。

14.1 関数 $\sqrt{x^2 + ax + b}$ の不定積分

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + ax + b} dx &= \frac{2x+a}{4} \sqrt{x^2 + ax + b} \\ &\quad - \frac{a^2-4b}{8} \log \left(x + \frac{a}{2} + \sqrt{x^2 + ax + b} \right) + C \end{aligned}$$

... 13-(1)

14.2 関数 $\sqrt{-x^2 + ax + b}$ の不定積分

$$\begin{aligned} \int \sqrt{-x^2 + ax + b} dx &= \frac{a^2+4b}{4} \tan^{-1} \frac{2x-a+\sqrt{a^2+4b}}{2\sqrt{-x^2+ax+b}} + \frac{2x-a}{4} \sqrt{-x^2 + ax + b} + C \\ &= \frac{a^2+4b}{8} \sin^{-1} \frac{2x-a}{\sqrt{a^2+4b}} + \frac{2x-a}{4} \sqrt{-x^2 + ax + b} + C \end{aligned}$$

... 13-(2)

14.3 関数 $\frac{1}{\sqrt{x^2+ax+b}}$ の不定積分

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+ax+b}} = \log |2(x + \sqrt{x^2 + ax + b}) + a| + C$$

... 5-(1)

14.4 関数 $\frac{1}{\sqrt{-x^2+ax+b}}$ の不定積分

関数が定義されるのは $a^2 + 4b > 0$ のときで、このとき

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+ax+b}} = 2 \tan^{-1} \frac{2x-a+\sqrt{a^2+4b}}{2\sqrt{-x^2+ax+b}} + C \quad \dots \quad 5-(2)$$

$$= \sin^{-1} \frac{2x-a}{\sqrt{a^2+4b}} + C \quad \dots \quad 6-(5)$$

$\frac{1}{\sqrt{-x^2+ax+b}}$ の不定積分を求めるのであれば、

$$-x^2 + ax + b = \left(\frac{\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \text{ と変形し、公式}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a} + C \text{ に帰着させて } 6-(5) \text{ を求めた方法}$$

を使う方が、自然に、しかもずっと簡単に求めることができる。5-(2)を求めたような、ある意味作為的な変形をして $\sqrt{\frac{x-a}{\beta-x}} = t$ とおいたりする必要は全くないのである。

そこで、学生から質問を受けた時、最初に感じた疑問である。それは、テキストではなぜ $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}}$ という

例題を載せ、 $\sqrt{\frac{x-1}{2-x}} = t$ とおいて置換積分する解法だけを示しているのか、ということである。そして、そこにもし意図があるなら、それはどのような意図であるのか、ということである。

テキストには他に練習問題として $\int \sqrt{\frac{1-x}{x+2}} dx$ という問題が載っている。しかし、この計算だったら、素直に $\sqrt{\frac{1-x}{x+2}} = t$ とおいて置換積分に入っていくだろう。テキストを見ても、 $\sqrt{-x^2+ax+b} = \sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)} = (\beta-x)\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}}$ というテクニカルな変形をして、 $\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}} = t$ とおく置換積分をやらなければならない理由がいまひとつ見えてこないのである。

もちろん、このようにやる計算に意味がないと言うつもりはない。問題は解ければよいというわけではない。様々な角度から多角的に考察することは必要だし、また、それができる問題がよい問題ということになるであろう。それに、大学の微分積分は、基礎科目である。基礎的・基本的な知識技能を身に付けなければならない科目である。スポーツで言えば、体力づくりのようなものだ。洗練されたスマートな計算だけをやっていけばよいというものでもない。たとえテストには出題されなくても、泥臭い、タフな計算も、トレーニングとしてはやっておく必要があるであろう。

15. おわりに

数学は、人類がこれまで長い時間をかけて、考えに考え抜いて築き上げてきた学問である。それは、蟻のはい入る隙間もないほど、きっちりと緻密に構成された学問のように思われる。大学1年生で扱われる数学も、すべてのことが考え尽くされた、数学的には完全に決着が付いた数学である。年代で言えば、せいぜい18世紀くらいまでの数学であろう。過去も過去、大昔の数学である。そこには、隙間のようなものは全く存在しないように思われる。

今回私がまとめた内容も、数学的にはトゥリビアルなことばかりである。ここに書かれているようなことは、多くの人たちが、ずっと昔からとっくに気付いていることであろう。テキスト等にも書かれていないのは、大学1年生が、無理関数についてそこまで掘り下げて学習する必要は全くないからである。また、そのようなことまで書けるスペースは、どんなテキストにも最初から存在していないからである。

しかし、このような報告であっても、教材についてのひとつの見方は提示できていると思う。また、例えば、令和4年度から高校で新たに実施される「理数探究」のテーマとしては使えることもあるかもしれない。

私は高校で授業をしているとき、なんで生徒にこんな計算をやらせるのか、と思うことがしばしばあった。無理式や三角関数のいろいろな計算がそうであった。対称式、交代式などの変形もそうであった。数学の基礎トレーニングとして、または、数学の常識として当然知っておかなければならないからやらせるのか、とも思っていた。しかし、対称式、交代式などがガロア理論のスタートであったように、無理式や三角関数の計算も、数学のいろいろなところで、非常に重要なピースとしてとても有効に働くのである。つまり、非常に「役に立つ」のである。

無理関数の積分は、「理数探究」のテーマとして、探究するにふさわしいテーマだと考える。また、探究の過程で、これまで学んできたことが、いかに「役に立つ」かが実感できると思う。

今回、無理関数の積分について、私の考え得ることはすべて考えることができたと思うし、ある程度整理をすることもできたと思う。このことは、これから学生を指導する上で、無理関数の積分の指導だけではなく、いろいろな面でプラスに働いてくれるものと考えられる。

最後に、この報告ができ上がったのも、ある学生からの質問がその発端であった。情報学部その学生には、心から感謝をしたい。

文献

- 1) 石原繁 浅野重初 “理工系入門 微分積分” 裳華房
- 2) 小寺平治 “テキスト 微分積分” 共立出版
- 3) 松本茂樹 森元勘治 “基礎微分積分” 学術図書出版社
- 4) 田安蔵・鈴木七緒・安岡善則・黒崎千代子 “詳解微積分演習 I” 共立出版