$$=\frac{1}{8}\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)^2+\frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|$$

$$-\frac{a^4}{8\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)^2}+\mathrm{C}$$

ここで　$\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)^2-\frac{a^4}{\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)^2}$

$$=2x^2+a^2+2x\sqrt{x^2+a^2}-\frac{a^4}{2x^2+a^2+2x\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$=2x^2+a^2+2x\sqrt{x^2+a^2}-\frac{a^4\left(2x^2+a^2-2x\sqrt{x^2+a^2}\right)}{(2x^2+a^2)^2-4x^2\left(x^2+a^2\right)}$$

$$=2x^2+a^2+2x\sqrt{x^2+a^2}-\frac{a^4\left(2x^2+a^2-2x\sqrt{x^2+a^2}\right)}{a^4}$$

$$=4x\sqrt{x^2+a^2}$$

以上より

$\int\sqrt{x^2+a^2}dx$

$$=\frac{1}{8}\cdot 4x\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+\mathrm{C}$$

$$=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+\mathrm{C}$$

となり，８－(1)と同じ結果になる。

## ９．関数 $\sqrt{x^2-a^2}$ の不定積分

次に，Ｂ２グループ $\sqrt{x^2-a^2}$ の不定積分を求める。

$\sqrt{x^2-a^2}$ の不定積分は，

$\int\sqrt{x^2+a^2}dx$

$=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+\mathrm{C}$　…　８－(1)

で，$a^2$ を $-a^2$ におき換えれば求まる。

ただし，常に $x+\sqrt{x^2+a^2}>0$ であるが，常に $x-\sqrt{x^2-a^2}>0$ とは限らないので

$\int\sqrt{x^2-a^2}dx$

$=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+\mathrm{C}$　…　９－(1)

となる。

置換積分で考えるときは，$x=\frac{a}{\cos\theta}$（$0\leqq\theta\leqq\pi$，$\theta\neq\frac{\pi}{2}$）とおくのが一般的である。

$x=\frac{a}{\cos\theta}$（$0\leqq\theta\leqq\pi$，$\theta\neq\frac{\pi}{2}$）とおくと

$$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2\theta}-a^2}=\sqrt{a^2\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right)}$$

$$=\sqrt{a^2\tan^2\theta}=a|\tan\theta|$$

$$dx=\frac{a\sin\theta}{\cos^2\theta}d\theta$$

関数の定義域を考えると　$x^2-a^2\geqq 0$

$(x+a)(x-a)\geqq 0$　　$x\leqq -a$，$a\leqq x$　より

$\frac{a}{\cos\theta}\leqq -a$，$a\leqq\frac{a}{\cos\theta}$

よって

$\frac{1}{\cos\theta}\leqq -1$ のとき　$-1\leqq\cos\theta<0$

$1\leqq\frac{1}{\cos\theta}$　のとき　$0<\cos\theta\leqq 1$

（ⅰ）$0<\cos\theta\leqq 1$ つまり $0\leqq\theta<\frac{\pi}{2}$ のとき

$a|\tan\theta|=a\tan\theta$　より

$$\int\sqrt{x^2-a^2}dx=\int a\tan\theta\cdot\frac{a\sin\theta}{\cos^2\theta}d\theta=\int\frac{a^2\sin^2\theta}{\cos^3\theta}d\theta$$

$$=a^2\int\frac{\sin^2\theta\cos\theta}{\cos^4\theta}d\theta$$

$$=a^2\int\frac{\sin^2\theta}{(1-\sin^2\theta)^2}\cdot\cos\theta\, d\theta$$

ここで　$\sin\theta=t$ とおくと　$\cos\theta d\theta=dt$ より

$$\int\sqrt{x^2-a^2}dx=a^2\int\frac{t^2}{(1-t^2)^2}dt=a^2\int\frac{t^2}{(1+t)^2(1-t)^2}dt$$

これ以降の計算は，**８．関数 $\sqrt{x^2+a^2}$ の不定積分**の $\int\frac{dt}{(1+t)^2(1-t)^2}$ の計算とほぼ同じで

$\int\sqrt{x^2-a^2}dx$

$=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\log\left|x-\sqrt{x^2-a^2}\right|+\mathrm{C}$　…　９－(2)

となる。

ここで　$\log\left|x-\sqrt{x^2-a^2}\right|=-\log\frac{1}{\left|x-\sqrt{x^2-a^2}\right|}$

$$=-\log\frac{\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|}{a^2}$$

であるから，定数をまとめれば，９－(2)は

$\int\sqrt{x^2-a^2}dx$

$=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+\mathrm{C}$

となり，９－(1)と同じ結果になる。

（ⅱ）$-1\leqq\cos\theta<0$ つまり $\frac{\pi}{2}<\theta\leqq\pi$ のとき

$a|\tan\theta|=-a\tan\theta$

また，$x=\frac{a}{\cos\theta}$ で，$x<0$，$\sin\theta\geqq 0$ となることに注意すれば，９－(1)と同じ結果

$\int\sqrt{x^2-a^2}dx$

$=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+\mathrm{C}$

になる。

また，$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{(x+a)(x-a)}$ と変形できるから，$\frac{1}{\sqrt{-x^2+ax+b}}$ の不定積分を，$\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}}=t$ とおいて置換積分した方法も利用できる。

$\sqrt{x^2-a^2}$ の定義域は　$x\leqq -a$，$a\leqq x$ である。

（ｉ）$x\geqq a$ のとき

$x+a>0$，$x-a\geqq 0$ となり

$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{(x+a)^2\cdot\frac{x-a}{x+a}}=(x+a)\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$ と変形できる。そこで，$\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}=t$ とおいて置換積分をしてみる。

$\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+ax+b}}$ の計算と同じような計算であるが

$$\frac{x-a}{x+a}=t^2\quad x-a=t^2x+at^2$$

$$(1-t^2)x=a(1+t^2)\qquad x=\frac{a(1+t^2)}{1-t^2}$$

$$dx=a\cdot\frac{2t(1-t^2)-(1+t^2)(-2t)}{(1-t^2)^2}dt=\frac{4at}{(1-t^2)^2}\,dt$$

また　$\sqrt{x^2-a^2}=(x+a)\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$

$$=\left\{\frac{a(1+t^2)}{1-t^2}+a\right\}t=\frac{2at}{1-t^2}$$

よって

$$\int\sqrt{x^2-a^2}dx=\int\frac{2at}{1-t^2}\cdot\frac{4at}{(1-t^2)^2}\,dt\ =8a^2\int\frac{t^2}{(1-t^2)^3}\,dt$$

$$=8a^2\int\frac{t^2}{(1+t)^3(1-t)^3}\,dt$$

$\frac{t^2}{(1+t)^3(1-t)^3}$ を部分分数に分解すると

$$\frac{t^2}{(1+t)^3(1-t)^3}=-\frac{1}{16}\left\{\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}+\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{1}{(1-t)^2}\right\}$$
$$+\frac{1}{8}\left\{\frac{1}{(1+t)^3}+\frac{1}{(1-t)^3}\right\}$$

よって　$\int\sqrt{x^2-a^2}dx=$

$$-\frac{a^2}{2}\left(\log|1+t|-\log|1-t|-\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)$$
$$+a^2\left\{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-t)^2}\right\}+\mathrm{C}$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\log|1-t|-\log|1+t|-\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}+\frac{1}{(1-t)^2}-\frac{1}{(1+t)^2}\right)+\mathrm{C}$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\log\left|\frac{1-t}{1+t}\right|-\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}+\frac{1}{(1-t)^2}-\frac{1}{(1+t)^2}\right)+\mathrm{C}$$

ここで

$$\left|\frac{1-t}{1+t}\right|=\left|\frac{1-\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}}{1+\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}}\right|=\left|\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}\right|=\left|\frac{x-\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|=\frac{|x-\sqrt{x^2-a^2}|}{a}$$

$$-\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}=\frac{1}{1+\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}}-\frac{1}{1-\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}}=\frac{\sqrt{x+a}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}-\frac{\sqrt{x+a}}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}}$$

$$=\sqrt{x+a}\left(-\frac{\sqrt{x-a}}{a}\right)=-\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$$

$$\frac{1}{(1-t)^2}-\frac{1}{(1+t)^2}=\frac{1}{\left(1-\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\right)^2}-\frac{1}{\left(1+\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\right)^2}$$

$$=\frac{x+a}{(\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a})^2}-\frac{x+a}{(\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a})^2}$$

$$=\frac{x+a}{2}\left(\frac{1}{x-\sqrt{x^2-a^2}}-\frac{1}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\right)$$

$$=\frac{x+a}{2}\cdot\frac{2\sqrt{x^2-a^2}}{a^2}=\frac{(x+a)\sqrt{x^2-a^2}}{a^2}$$

以上より

$\int\sqrt{x^2-a^2}dx$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\log\frac{|x-\sqrt{x^2-a^2}|}{a}-\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}+\frac{(x+a)\sqrt{x^2-a^2}}{a^2}\right)+\mathrm{C}$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\log\frac{|x-\sqrt{x^2-a^2}|}{a}+\frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{a^2}\right)+\mathrm{C}$$

$$=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\log\frac{|x-\sqrt{x^2-a^2}|}{a}+\mathrm{C}$$

定数をまとめれば

$$\int\sqrt{x^2-a^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\log\left|x-\sqrt{x^2-a^2}\right|+\mathrm{C}$$

これは９－(2)だから，結局９－(1)と同じ結果になる。

ここでも因数分解できるかどうかが，不定積分を求める上で，大きな違いとなって表れてきているのである。

（ⅱ）$x\leqq -a$ のとき

$x+a\leqq 0$，$x-a<0$ だから

$$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{(x-a)^2\cdot\frac{x+a}{x-a}}=(a-x)\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$$

$\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}=t$ とおくと　$x=\frac{a(t^2+1)}{t^2-1}$　$dx=-\frac{4at}{(t^2-1)^2}\,dt$

また　$\sqrt{x^2-a^2}=(a-x)\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}=-\frac{2at}{t^2-1}$

よって

$$\int\sqrt{x^2-a^2}dx=\int\left(-\frac{2at}{t^2-1}\right)\left\{-\frac{4at}{(t^2-1)^2}\right\}\,dt$$

$$=8a^2\int\frac{t^2}{(t^2-1)^3}\,dt$$

$$=-8a^2\int\frac{t^2}{(1+t)^3(1-t)^3}\,dt$$

$\frac{t^2}{(1+t)^3(1-t)^3}$ を部分分数に分解し，（ｉ）の場合と同様の計算をして

$\int\sqrt{x^2-a^2}dx$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|-\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}+\frac{1}{(1+t)^2}-\frac{1}{(1-t)^2}\right)+\mathrm{C}$$

ここで　$x+a \leqq 0$，$x-a<0$ に注意して

$$\left|\frac{1+t}{1-t}\right| = \left|\frac{1+\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}}{1-\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}}\right| = \left|\frac{1+\sqrt{\frac{-(x+a)}{-(x-a)}}}{1-\sqrt{\frac{-(x+a)}{-(x-a)}}}\right| = \left|\frac{\sqrt{-(x-a)}+\sqrt{-(x+a)}}{\sqrt{-(x-a)}-\sqrt{-(x+a)}}\right|$$

$$= \left|-\frac{x-\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| = \frac{\left|x-\sqrt{x^2-a^2}\right|}{a}$$

同様に　$-\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$

$$\frac{1}{(1+t)^2}-\frac{1}{(1-t)^2} = \frac{(x-a)\sqrt{x^2-a^2}}{a^2}$$

以上より

$$\int \sqrt{x^2-a^2}dx$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\log\frac{\left|x-\sqrt{x^2-a^2}\right|}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a} + \frac{(x-a)\sqrt{x^2-a^2}}{a^2}\right) + \mathrm{C}$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\log\frac{\left|x-\sqrt{x^2-a^2}\right|}{a} + \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{a^2}\right) + \mathrm{C}$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} + \frac{a^2}{2}\log\frac{\left|x-\sqrt{x^2-a^2}\right|}{a} + \mathrm{C}$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} + \frac{a^2}{2}\log\left|x-\sqrt{x^2-a^2}\right| + \mathrm{C}$$

これも９－(2)だから，いずれの場合も

$$\int \sqrt{x^2-a^2}dx$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + \mathrm{C}$$

となる。

以上にように，$\sqrt{x^2-a^2}$ の不定積分は，$\sqrt{x^2-a^2} = t-x$ とおく置換積分も含めて，３通りの方法で求めることができる。不定積分は，ただ１通りの方法で求めるしかないことが多い。私の知る限りでは，３通りの方法で求められる計算というのは，けっこう珍しいケースのような気がする。

## 10．関数 $\sqrt{a^2-x^2}$ の不定積分

最後に，Ｂ２グループ $\sqrt{a^2-x^2}$ の不定積分を求める。

$\sqrt{a^2-x^2}$ については，$\sqrt{-x^2+ax+b}$ の不定積分が求まっているので，基本的には解決済みである。つまり

$$\int \sqrt{-x^2+ax+b}\,dx$$

$$= \frac{a^2+4b}{4}\tan^{-1}\frac{2x-a+\sqrt{a^2+4b}}{2\sqrt{-x^2+ax+b}} + \frac{2x-a}{4}\sqrt{-x^2+ax+b} + \mathrm{C} \quad \cdots \quad 7-(2)$$

で，$a=0$，$b=a^2$　とおけば

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$= a^2\tan^{-1}\sqrt{\frac{x+a}{a-x}} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \mathrm{C} \quad \cdots \quad 10-(1)$$

また，$\sqrt{a^2-x^2}$ の不定積分を置換積分で考えるときは，$x=a\sin\theta$（$-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$）とおくのが一般的である。

$x=a\sin\theta$（$-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$）とおくと　$dx = a\cos\theta\,d\theta$

また　$\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta} = \sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}$

$= \sqrt{a^2\cos^2\theta} = |a\cos\theta| = a\cos\theta$

よって　$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \int a\cos\theta \cdot a\cos\theta\,d\theta$

$$= a^2\int\cos^2\theta\,d\theta = a^2\int\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right) + \mathrm{C}$$

ここで　$\sin\theta = \frac{x}{a}$ より　$\theta = \sin^{-1}\frac{x}{a}$

また　$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$ より

$$\frac{1}{2}\sin 2\theta = \sin\theta\cos\theta = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}$$

よって　$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{a^2}{2}\left(\sin^{-1}\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}\right) + \mathrm{C}$

$$= \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \mathrm{C} \quad \cdots \quad 10-(2)$$

10－(1)と 10－(2)も，定数の違いだけである。（６－(6)と同じ計算）

## 11．Ｂ２グループの不定積分

Ｂ２グループ $\sqrt{x^2+a^2}$，$\sqrt{x^2-a^2}$，$\sqrt{a^2-x^2}$ の不定積分は，部分積分を使って，それぞれＢ１グループ $\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$，$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$，$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ の不定積分に帰着させることもできる。つまり，Ｂ１グループとＢ２グループの不定積分は，一方が求まれば，他方も求まることになる。

$$\int \sqrt{x^2+a^2}dx = x\sqrt{x^2+a^2} - \int x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}dx$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int\frac{x^2+a^2-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int\left(\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)dx \text{ より}$$

$$2\int\sqrt{x^2+a^2}dx = x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

よって　$\int \sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)$

同様に　$\int \sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}\right)$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)$$

これらの式は，関数が $\sqrt{x^2+a^2}$，$\sqrt{x^2-a^2}$，$\sqrt{a^2-x^2}$ だから成り立つ，これらの関数に特有な，これらの関数の個性のような性質である。

これらの式に，６．Ｂ１グループの不定積分１ に示した結果を代入すれば，すでに得られた結果と一致する。

## 12. Ｂ１グループの不定積分２

Ｂ１グループ $\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$ ，$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$ ，$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ の不定積分はすべて求まっている。しかし，Ｂ２グループ $\sqrt{x^2+a^2}$， $\sqrt{x^2-a^2}$，$\sqrt{a^2-x^2}$ の不定積分を求めた置換積分を使うと，多少意味ある計算が出てくることもある。ここではそれらについて，落ち穂拾い的に書いていく。

### 12.1 関数 $\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$ の不定積分

$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+\mathrm{C}$ … 6 －(1) である。

いま，$x=a\tan\theta$ $\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\int\frac{\cos\theta}{a}\cdot\frac{a}{\cos^2\theta}d\theta=\int\frac{d\theta}{\cos\theta}=\int\frac{\cos\theta}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\int\frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}d\theta$$

$\sin\theta=t$ とおくと $\cos\theta\,d\theta=dt$ より

$$\int\frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}d\theta=\int\frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}(\log|1+t|-\log|1-t|)+\mathrm{C}$$

$$=\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+\mathrm{C}=\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right|+\mathrm{C}$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}+\mathrm{C}$$

ここで $\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}=\frac{(1+\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}=\frac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}=\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2$

より $\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}=\log\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=\log\left(\tan\theta+\frac{1}{\cos\theta}\right)$

また $\cos\theta>0$ だから

$$\frac{1}{\cos\theta}=\sqrt{1+\tan^2\theta}=\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}\sqrt{x^2+a^2}$$

よって

$$\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}=\log\left(\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right)=\log\left(\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right)$$

$$=\log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)-\log a$$

以上より，$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+\mathrm{C}$ となり，同じ結果が得られた。

### 12.2 関数 $\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$ の不定積分

$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+\mathrm{C}$ … 6 －(2) である。

$x=\frac{a}{\cos\theta}$（$0\leqq\theta\leqq\pi$，$\theta\neq\frac{\pi}{2}$）とおくと

（ｉ）$0<\cos\theta\leqq1$ つまり $0\leqq\theta<\frac{\pi}{2}$ のとき

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}==\int\frac{1}{a\tan\theta}\cdot\frac{a\sin\theta}{\cos^2\theta}d\theta=\int\frac{d\theta}{\cos\theta}$$

この計算は，１）に現れた計算である。

（ⅱ）$-1\leqq\cos\theta<0$ つまり $\frac{\pi}{2}<\theta\leqq\pi$ のときも，同様の計算になる。

また，$\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}=t$ とおいても，既に現れた計算と同じような計算になる。

### 12.3 関数 $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ の不定積分

$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ の不定積分は，通常テキストでは，$\sin^{-1}x$ の微分から求めていく。

いま，$x=a\sin\theta$（$-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$）とおくと

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{1}{a\cos\theta}\cdot a\cos\theta\,d\theta=\int d\theta=\theta+\mathrm{C}$$

$$=\sin^{-1}\frac{x}{a}+\mathrm{C}$$

となり，同じ結果が得られる。

## 13. Ａ２グループの不定積分２

再び, 関数 $\sqrt{x^2+ax+b}$ と $\sqrt{-x^2+ax+b}$ の不定積分を考える。

### 13.1 関数 $\sqrt{x^2+ax+b}$ の不定積分

$\sqrt{x^2+ax+b}=t-x$ とおいて置換積分しても，有効な計算にはならなかった。(７－(1))

そこで ，$\sqrt{x^2+a^2}$，$\sqrt{x^2-a^2}$ の不定積分の結果

$$\int\sqrt{x^2+a^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+\mathrm{C}$$

… 8 －(1)

$$\int\sqrt{x^2-a^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+\mathrm{C}$$

… 9 －(1)

に帰着させ，求めていく。

$x^2+ax+b=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2-4b}{4}$ より $-\frac{a^2-4b}{4}=p$

とおいて

$p>0$ のとき　$x^2+ax+b=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(\sqrt{p}\right)^2$

$p<0$ のとき　$x^2+ax+b=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\left(\sqrt{-p}\right)^2$

と変形できるから

$p>0$ のとき，８－(1)より

$$\int\sqrt{x^2+ax+b}\,dx=\int\sqrt{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(\sqrt{p}\right)^2}\,dx$$

$$=\frac{x+\frac{a}{2}}{2}\sqrt{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(\sqrt{p}\right)^2}$$

$$+\frac{(\sqrt{p})^2}{2}\log\left(x+\frac{a}{2}+\sqrt{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(\sqrt{p}\right)^2}\right)+\mathrm{C}$$

$$=\frac{2x+a}{4}\sqrt{x^2+ax+b}$$

$$-\frac{a^2-4b}{8}\log\left(x+\frac{a}{2}+\sqrt{x^2+ax+b}\right)+\mathrm{C}$$

…　13－(1)

$p<0$ のとき，９－(1)より

$$\int\sqrt{x^2+ax+b}\,dx=\int\sqrt{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\left(\sqrt{-p}\right)^2}\,dx$$

$$=\frac{x+\frac{a}{2}}{2}\sqrt{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\left(\sqrt{-p}\right)^2}$$

$$-\frac{(\sqrt{-p})^2}{2}\log\left(x+\frac{a}{2}+\sqrt{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\left(\sqrt{-p}\right)^2}\right)+\mathrm{C}$$

$$=\frac{2x+a}{4}\sqrt{x^2+ax+b}$$

$$-\frac{a^2-4b}{8}\log\left(x+\frac{a}{2}+\sqrt{x^2+ax+b}\right)+\mathrm{C}$$

となり，$p>0$ のときと同じ結果になる。

つまり，$p$ の値に関係なく 13－(1)は成り立つ。

もちろん理屈の上では，$\sqrt{x^2+a^2}$ や $\sqrt{x^2-a^2}$ の不定積分を求めた置換（$x+\frac{a}{2}=\sqrt{p}\tan\theta$ や $x+\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{-p}}{\cos\theta}$，$\sqrt{\frac{x+\frac{a}{2}-\sqrt{-p}}{x+\frac{a}{2}+\sqrt{-p}}}=t$ など）を使えば，$\sqrt{x^2+ax+b}$ つまり $\sqrt{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(\sqrt{p}\right)^2}$ や $\sqrt{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\left(\sqrt{-p}\right)^2}$ の不定積分も直接計算することができる。しかし，それらも，$\sqrt{x^2+a^2}$ や $\sqrt{x^2-a^2}$ の不定積分を求めてしまえば，全く同じ内容の計算であり，ほとんど意味のないものである。

### 13. 2　関数 $\sqrt{-x^2+ax+b}$ の不定積分

関数が定義されるのは $a^2+4b>0$ のときである。$\sqrt{-x^2+ax+b}$ の不定積分は求まっている（７－(2)）ので，$\sqrt{a^2-x^2}$ の不定積分

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-\ x^2}+\mathrm{C}$$

に帰着させる必要はないが，帰着させれば，

$-x^2+ax+b=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2+4b}{4}$ より

$\frac{a^2+4b}{4}=q$ とおくと，$q>0$ で

$-x^2+ax+b=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(\sqrt{q}\right)^2$

と変形できるから

$$\int\sqrt{-x^2+ax+b}\,dx=\int\sqrt{\left(\sqrt{q}\right)^2-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\sqrt{q}\right)^2\sin^{-1}\frac{x-\frac{a}{2}}{\sqrt{q}}+\left(x-\frac{a}{2}\right)\sqrt{\left(\sqrt{q}\right)^2-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}\right\}+\mathrm{C}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{a^2+4b}{4}\sin^{-1}\frac{2x-a}{\sqrt{a^2+4b}}+\left(x-\frac{a}{2}\right)\sqrt{-x^2+ax+b}\right\}+\mathrm{C}$$

$$=\frac{a^2+4b}{8}\sin^{-1}\frac{2x-a}{\sqrt{a^2+4b}}+\frac{2x-a}{4}\sqrt{-x^2+ax+b}+\mathrm{C}$$

…　13－(2)

となる。

５－(2)と６－(5)が定数の違いだけであるので，13－(2)も７－(2)と定数の違いだけになる。

## 14.　まとめ

最後に，主要な４つの不定積分について，結果をまとめておく。

### 14. 1　関数 $\sqrt{x^2+ax+b}$ の不定積分

$$\int\sqrt{x^2+ax+b}\,dx=\frac{2x+a}{4}\sqrt{x^2+ax+b}$$

$$-\frac{a^2-4b}{8}\log\left(x+\frac{a}{2}+\sqrt{x^2+ax+b}\right)+\mathrm{C}\quad\cdots\quad 13-(1)$$

### 14. 2　関数 $\sqrt{-x^2+ax+b}$ の不定積分

$$\int\sqrt{-x^2+ax+b}\,dx$$

$$=\frac{a^2+4b}{4}\tan^{-1}\frac{2x-a+\sqrt{a^2+4b}}{2\sqrt{-x^2+ax+b}}+\frac{2x-a}{4}\sqrt{-x^2+ax+b}+\mathrm{C}$$

…　７－(2)

$$=\frac{a^2+4b}{8}\sin^{-1}\frac{2x-a}{\sqrt{a^2+4b}}+\frac{2x-a}{4}\sqrt{-x^2+ax+b}+\mathrm{C}$$

…　13－(2)

### 14. 3　関数 $\frac{1}{\sqrt{x^2+ax+b}}$ の不定積分

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+ax+b}}=\log\left|2\left(x+\sqrt{x^2+ax+b}\right)+a\right|+\mathrm{C}$$

…　５－(1)

### 14.4　関数 $\frac{1}{\sqrt{-x^2+ax+b}}$ の不定積分

関数が定義されるのは $a^2+4b>0$ のときで，このとき

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+ax+b}}=2\tan^{-1}\frac{2x-a+\sqrt{a^2+4b}}{2\sqrt{-x^2+ax+b}}+\mathrm{C}\quad\cdots\quad 5-(2)$$

$$=\sin^{-1}\frac{2x-a}{\sqrt{a^2+4b}}+\mathrm{C}\quad\cdots\quad 6-(5)$$

$\frac{1}{\sqrt{-x^2+ax+b}}$ の不定積分を求めるのであれば，

$-x^2+ax+b=\left(\frac{\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^2-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2$ と変形し，公式

$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\sin^{-1}\frac{x}{a}+\mathrm{C}$ に帰着させて６－(5)を求めた方法を使う方が，自然に，しかもずっと簡単に求めることができる。５－(2)を求めたような，ある意味作為的な変形をして $\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}}=t$ とおいたりする必要は全くないのである。

そこで，学生から質問を受けた時，最初に感じた疑問である。それは，テキストではなぜ $\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}}$ という例題を載せ，$\sqrt{\frac{x-1}{2-x}}=t$ とおいて置換積分する解法だけを示しているのか，ということである。そして，そこにもし意図があるなら，それはどのような意図であるのか，ということである。

テキストには他に練習問題として $\int\sqrt{\frac{1-x}{x+2}}dx$ という問題が載っている。しかし，この計算だったら，素直に $\sqrt{\frac{1-x}{x+2}}=t$ とおいて置換積分に入っていくだろう。テキストを見ても，$\sqrt{-x^2+ax+b}=\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}=(\beta-x)\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}}$ というテクニカルな変形をして，$\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}}=t$ とおく置換積分をやらなければならない理由がいまひとつ見えてこないのである。

もちろん，このようにやる計算に意味がないと言うつもりはない。問題は解ければよいというわけではない。様々な角度から多角的に考察することは必要だし，また，それができる問題がよい問題ということになるであろう。それに，大学の微分積分は，基礎科目である。基礎的・基本的な知識技能を身に付けなければならない科目である。スポーツで言えば，体力づくりのようなものだ。洗練されたスマートな計算だけをやっていればよいというものでもない。たとえテストには出題されなくても，泥臭い，タフな計算も，トレーニングとしてはやっておく必要があるであろう。

## 15．おわりに

数学は，人類がこれまで長い時間をかけて，考えに考え抜いて築き上げてきた学問である。それは，蟻のはい入る隙間もないほど，きっちりと緻密に構成された学問のように思われる。大学１年生で扱われる数学も，すべてのことが考え尽くされた，数学的には完全に決着が付いた数学である。年代で言えば，せいぜい 18 世紀くらいまでの数学であろう。過去も過去，大昔の数学である。そこには，隙間のようなものは全く存在しないように思われる。

今回私がまとめた内容も，数学的にはトゥリビアルなことばかりである。ここに書かれているようなことは，多くの人たちが，ずっと昔からとっくに気付いていることであろう。テキスト等に書かれていないのは，大学１年生が，無理関数についてそこまで掘り下げて学習する必要は全くないからである。また，そのようなことまで書けるスペースは，どんなテキストにも最初から存在していないからである。

しかし，このような報告であっても，教材についてのひとつの見方は提示できていると思う。また，例えば，令和４年度から高校で新たに実施される「理数探究」のテーマとしては使えることもあるかもしれない。

私は高校で授業をしているとき，なんで生徒にこんな計算をやらせるのか，と思うことがしばしばあった。無理式や三角関数のいろいろな計算がそうであった。対称式，交代式などの変形もそうであった。数学の基礎トレーニングとして，または，数学の常識として当然知っておかなければならないからやらせるのか，とも思っていた。しかし，対称式，交代式などがガロア理論のスタートであったように，無理式や三角関数の計算も，数学のいろいろなところで，非常に重要なピースとしてとても有効に働くのである。つまり，非常に「役に立つ」のである。

無理関数の積分は，「理数探究」のテーマとして，探究するにふさわしいテーマだと考える。また，探究の過程で，これまで学んできたことが，いかに「役に立つ」かが実感できると思う。

今回，無理関数の積分について，私の考え得ることはすべて考えることができたと思うし，ある程度整理をすることもできたと思う。このことは，これから学生を指導する上で，無理関数の積分の指導だけではなく，いろいろな面でプラスに働いてくれるものと考える。

最後に，この報告ができ上ったのも，ある学生からの質問がその発端であった。情報学部のその学生には，心から感謝をしたい。

文献


1） 石原繁 浅野重初“理工系入門 微分積分”裳華房

2） 小寺平治“テキスト 微分積分”共立出版

3） 松本茂樹 森元勘治“基礎微分積分”学術図書出版社

4） 田安蔵・鈴木七緒・安岡善則・黒崎千代子“詳解微積分演習Ｉ” 共立出版