自由単位半群の biunitary submonoid の syntactic monoid について II

On syntactic monoids of biunitary submonoids of free monoids II

田中　源次郎*

Genjiro TANAKA*

Abstract: This paper is a continuation of the study of Tanaka[10]. We deal with the maximal biprefix code construction which is a natural generalization of group code construction.

記号と諸定義

本論文は文献 [10] の続編である．従って本節を除き，各節の番号は文献 [10] からの続き番号を与える．文献 [10] では群コードの構成に関する拡張を行い，自由単位半群 A^* から完全単純半群 M の 1-添加 M^1 上への morphism があるとき，M^1 の適当な部分集合 S については $\varphi^{-1}(S)$ が A^* の free submonoid をなし，その基底は極大な biprefix code をなすことを示した．それらの code は完全単純半群の表現に付随するものであるから，completely simple semigroup code と呼ぶことが出来る性質のものである．本論文では，文献 [10] での方法で得ることが出来る code の syntactic monoid を取扱う．使用する用語と記号については，重複を避け論文 [10] を参照することとし，必要最小限の説明に留める．以下に述べる記号 $A, G, H,$ については本論文全体を通して記号の意味を固定して使用する．

A はアルファベット，A^+ は A 上の自由半群，A^* は A 上の自由単位半群とする．G は群，H は G の部分群とする．以上の記号と意味については論文全体を通して固定して用いる．もし $x, y \in G$ かつ $xy^{-1} \in H$ ならば，$x \equiv y \bmod H$. と書く．

K を $K \subset H \subset G$ なる G の部分群とする．G における H の左剰余類の集合上の右正則表現の核 $\cap_{g\in G} g^{-1}Hg$ と K との共通部分を $K(H)$ で表す．つまり $K(H) = (\cap_{g\in G} g^{-1}Hg) \cap K$.

G 上の構造行列 Σ を持つ $I \times J$ *Rees matrix semigroup* を $M(G; I, J; \Sigma)$ であらわす．もし $m{=}Card(I)$ と $n{=}Card(J)$ がともに有限の場合は $M(G; I, J; \Sigma)$ を $M(G; n, m; \Sigma)$ と明示する．

$\varphi : A^* \to M(G, I, J, \Sigma)^1$ を準同形写像とする．G の空でない部分集合 S に対し

$$\tilde{S}_{ij}{=}\{(h; i, j) | h \in S\}, \qquad \tilde{S}{=} \bigcup_{i\in I, j\in J} \tilde{S}_{ij}$$

そして

$$L_\varphi(S){=}\varphi^{-1}(\tilde{S}) \bigcup \{1\}.$$

と定義する．

A^+ から G への写像 $\delta : A^+ \to G$ を，

$$\varphi(w){=}(g; i, j) \text{ のとき}，\delta(w){=}g,$$

と定義する．このとき $\varphi(u){=}(x; i, j)$ かつ $\varphi(v){=}(y; k, l)$ ならば，$\delta(uv){=}x\sigma_{jk}y{=}\delta(u)\sigma_{jk}\delta(v)$ となる．

4. $L_\varphi(H)$ の syntactic monoid

$\varphi : A^* \to M(G; I, J; \Sigma)^1$ を上への morphism とする．文献 [10] により，Σ は H 上の行列ならば $L_\varphi(H)$ は A^* の submonoid である．本節では，Σ は H 上の行列の場合，submonoid $L_\varphi(H)$ は A^* の syntactic monoid が完全単純半群となることを示すことが主目的である．

L を A^* の部分集合とする．各 $w \in A^*$ に対し $A^* \times A^*$ の部分集合を次のように定義する；

$$Cont_L(w){=}\{(u, v) \,|\, u, v \in A^*, uwv \in L\}.$$

L の *syntactic congruence* $\equiv_L$ とは次で定義される合同関係である；

$$w \equiv_L w' \iff Cont_L(w){=}Cont_L(w').$$

商半群 $A^*/\equiv_L$ は L の *syntactic monoid* と呼ばれる．

$\varphi : A^* \to M(G; I, J; \Sigma)^1$ を上への morphism とする．以下 $L = L_\varphi(H)$ の場合について議論する．$w \in A^*$ の $\equiv_L$-類は $[w]$ で表す．

群 G 上の行列 Σ の j 行と i 列をそれぞれ $\sum_j^R$ と $\sum_i^C$ で表す．K を G の部分群とする．もしすべての $i \in I$ に対し，$\sigma_{ji}\sigma_{li}^{-1} \in K$ ならば，$\sum_j^R \equiv \sum_l^R \bmod K$ と書く．もしすべての $j \in J$ に対し，$\sigma_{ji}\sigma_{jk}^{-1} \in K$ ならば，$\sum_i^C \equiv \sum_k^C \bmod K$ と書く．

群 G 上の行列 Σ のすべての成分で生成される G の部分群を G_Σ で表す．つまり

$$G_\Sigma{=} < \sigma_{ji} \,|\, j \in J, i \in I > .$$

群 G 上の $J \times I$ 行列 $\Sigma{=}(\sigma_{ji})$ は以下を満たすとき H-正規化されていると呼ばれる：

(1) Σ は H 上の行列である．

(2) 各 $(i, k) \in I \times I$ に対し，$\sigma_{ti} \equiv \sigma_{tk} \bmod G_\Sigma(H)$ を満たすある $t \in J$ が存在する．

(3) 各 $(j, l) \in J \times J$ に対し，$\sigma_{js} \equiv \sigma_{ls} \bmod G_\Sigma(H)$ を満たすある $s \in I$ が存在する．

「H-正規化された行列」なる概念は著者がはじめて定義導入 ([7]) したものであり一般に馴染みの無いものであるから例を示す．

例 4.1. $G_1 {=} < x, y \,|\, x^3{=}y^2{=}(xy)^2{=}1 >$ (3 次対称群),
$Z_1 {=} < z \,|\, z^4{=}1 >$(位数 4 の巡回群),
$G = G_1 \times Z_1$ (群としての直積),
$H = < y > \times Z_1$ (G の位数 8 の部分群)

2007 年 3 月 2 日 受理

*理工学部 情報システム学科

とする．次の 3 つの $J\times I$ 行列はすべて H 上の行列であり，
$G_{\Sigma_i} =< y,\, z^2 >=< y > \times < z^2 >$, かつ
$G_{\Sigma_i}(H) = \{1\}\times < z^2 >\ \ i = 1, 2, 3$ ，である．

$$(1)\ \Sigma_1= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & y \\ 1 & z^2 \end{pmatrix}, \quad (2)\ \Sigma_2= \begin{pmatrix} 1 & z^2 & y \\ 1 & y & yz^2 \\ y & yz^2 & y \end{pmatrix},$$

$$(3)\ \Sigma_3= \begin{pmatrix} 1 & y & yz^2 \\ 1 & z^2 & yz^2 \\ 1 & yz^2 & y \end{pmatrix}$$

(1) $\sigma_{p1} \equiv \sigma_{q1} \bmod G_{\Sigma_1}(H)$, $p, q \in \{1, 2, 3\}$. かつ $\sigma_{11} \equiv \sigma_{12} \bmod G_{\Sigma_1}(H)$. 従って Σ_1 は H-正規化された行列である．(1) のような第 1 行と第 1 列がすべて単位元 1 であるような行列は一般に「正規化されている」と呼ばれる．正規化された行列 Σ は，G_Σ を含む任意の部分群 H について H-正規化された行列である．

(2) $\sigma_{11} \equiv \sigma_{12}, \sigma_{31} \equiv \sigma_{33}, \sigma_{32} \equiv \sigma_{33} \bmod G_{\Sigma_2}(H)$, かつ $\sigma_{13} \equiv \sigma_{33}, \sigma_{22} \equiv \sigma_{32} \bmod G_{\Sigma_2}(H)$. 従って Σ_2 は H-正規化された行列である．

(3) 任意の j に対し，$\sigma_{j1}\sigma_{j3}^{-1} \notin G_{\Sigma_3}(H)$, 従って Σ_3 は H-正規化された行列ではない．

命題 4.1. Σ を H-正規化された $J\times I$ 行列とする．$\varphi : A^* \to M(G; I, J; \Sigma)^1$ を上への morphism, $w, w' \in A^+$ を $\varphi(w)=(\delta(w); i, j)$ そして $\varphi(w')=(\delta(w'); k, l)$ であるような語とする．$w \equiv_{L_\varphi(H)} w'$ であるための必要十分条件は次の 3 条件がなりたつことである；
(1) $\delta(w) \equiv \delta(w') \bmod H(H)$,
(2) $\sum_i^C \equiv \sum_k^C \bmod G_\Sigma(H)$,
(3) $\sum_j^R \equiv \sum_l^R \bmod G_\Sigma(H)$.

証明. ($\Rightarrow$). Σ は H-正規化されているから，$\sigma_{ti}\sigma_{tk}^{-1} \in G_\Sigma(H)$ および $\sigma_{js}\sigma_{ls}^{-1} \in G_\Sigma(H)$ となるようなある $t \in J$ と $s \in I$ が存在する．
(1) g を G 中の任意の元とする．φ は全射であるから，ある $u, v \in A^+$ とある $t' \in I, s' \in J$ が存在し $\varphi(u)=(g\sigma_{ti}^{-1}; t', t)$ および $\varphi(v)=(\sigma_{js}^{-1}\delta(w)^{-1}g^{-1}; s, s')$ となる．このとき
$\varphi(uwv)=(1; t', s') \in \tilde{H}$ であるから $uwv \in L_\varphi(H)$. よって $uw'v \in L_\varphi(H)$. 従ってある $\tau_1, \tau_2 \in G_\Sigma(H)$ に対し

$$\begin{aligned}\delta(uw'v)&=g\sigma_{ti}^{-1}\sigma_{tk}\delta(w')\sigma_{ls}\sigma_{js}^{-1}\delta(w)^{-1}g^{-1}\\ &= g\sigma_{tk}^{-1}\tau_1\sigma_{tk}\delta(w')\sigma_{ls}\sigma_{ls}^{-1}\tau_2\delta(w)^{-1}g^{-1} \in H.\end{aligned}$$

τ_1, τ_2 は G の正規部分群 $H(H)$ の元だから $g\delta(w')\delta(w)^{-1}g^{-1} \in H$. よって $\delta(w')\delta(w)^{-1} \in g^{-1}Hg$. $g \in G$ は任意の元であったから $\delta(w')\delta(w)^{-1} \in H(H)$.

(2) q を J 中の任意の元とし，$\varphi(z)=(1; q', q)$, $z \in A^+$ とする．$zw \equiv_{L_\varphi(H)} zw'$ であることと (1) により $\delta(zw)\delta(zw')^{-1} \in H(H)$. よって $\sigma_{qi}\delta(w)\delta(w')^{-1}\sigma_{qk}^{-1} \in H(H)$. $\delta(w)\delta(w')^{-1} \in H(H)$ であり $H(H)$ が G の正規部分群であることより，

$$H(H)\sigma_{qk} = H(H)\sigma_{qi}\delta(w)\delta(w')^{-1} = H(H)\sigma_{qi},$$

つまり $\sigma_{qi}\sigma_{qk}^{-1} \in H(H)$. 従って $\sigma_{qi}\sigma_{qk}^{-1} \in H(H)\cap G_\Sigma = G_\Sigma(H)$ がすべての $q \in J$ について成り立つ．つまり，
$\sum_i^C \equiv \sum_k^C \bmod G_\Sigma(H)$ を得る．
(3) p を I 中の任意の元，そして $\varphi(z)=(1; p, p')$, $z \in A^+$ とする．$wz \equiv_{L_\varphi(H)} w'z$ であることと (1) により

$$\delta(wz)\delta(w'z)^{-1} \in H(H).\text{つまり}\,\delta(w)\sigma_{jp}\sigma_{lp}^{-1}\delta(w')^{-1} \in H(H)$$

である．$\delta(w)\delta(w')^{-1} \in H(H)$ より，$\sigma_{jp}\sigma_{lp}^{-1} \in H(H)$ を得る．

($\Leftarrow$). 逆に (1), (2), (3) が成立すると仮定する．
$\varphi(x)=(\delta(x); p, q)$, $\varphi(y)=(\delta(y); r, s)$, $x, y \in A^+$ とする．定義により $G_\Sigma(H) \subseteq H(H) \subseteq G$ であり $H(H)$ が G の正規部分群であることに注意すると次の導出が成り立つ；

$$\begin{aligned}&xwy \in L_\varphi(H) \Rightarrow \delta(x)\sigma_{qi}\delta(w)\sigma_{jr}\delta(y) \in H\\ &\Rightarrow \delta(x)\sigma_{qk}\tau_1 h\delta(w')\sigma_{lr}\tau_2\delta(y) \in H, \exists\tau_1, \tau_2 \in G_\Sigma(H), h \in H(H)\\ &\Rightarrow \delta(x)\sigma_{qk}\delta(w')\sigma_{lr}\delta(y) \in H \Rightarrow \delta(xw'y) \in H \Rightarrow xw'y \in L_\varphi(H).\end{aligned}$$

逆の導出も同様に示すことが出来る．従って $w \equiv_{L_\varphi(H)} w'$.
証明終.

monoid M 上の 3 つの同値関係 $\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{H}$ (Green's relations) を以下のように定義する；

$$m\mathcal{R}m' \text{ iff } mM=m'M, \quad m\mathcal{L}m' \text{ iff } Mm=Mm', \quad \mathcal{H}=\mathcal{R}\cap\mathcal{L}.$$

系 4.2. 命題 4.1 で用いた記号と仮定のもとで次が成立する．
(1) $[w]\mathcal{R}[w'] \iff \sum_i^C \equiv \sum_k^C \bmod G_\Sigma(H)$,
(2) $[w]\mathcal{L}[w'] \iff \sum_j^R \equiv \sum_l^R \bmod G_\Sigma(H)$,
(3) $[w]\mathcal{H}[w'] \iff \sum_i^C \equiv \sum_k^C \bmod G_\Sigma(H)$ かつ $\sum_j^R \equiv \sum_l^R \bmod G_\Sigma(H)$.

証明. (1) ($\Rightarrow$). もし $[w]\mathcal{R}[w']$ ならば，ある $u \in A^*$ に対し $[w']=[w][u]$ である．つまり，$w' \equiv_{L_\varphi(H)} wu$ となっている．$\varphi(w)=(\delta(w); i, j)$ かつ $\varphi(w')=(\delta(w'); k, l)$ より，ある $s \in J$ について $\varphi(wu)=(\delta(wu); i, s)$ となる．従って，命題 4.1 の (2) により，$\Sigma_i^C \equiv \Sigma_k^C \bmod G_\Sigma(H)$ が成立する．

($\Leftarrow$). $\Sigma_i^C \equiv \Sigma_k^C \bmod G_\Sigma(H)$ と仮定する．φ が全射であることから，$\varphi(u) = (\sigma_{jt}^{-1}\delta(w)^{-1}\delta(w'); t, l)$ であるようなある $u \in A^+$ が存在する．$\varphi(wu)=(\delta(w'); i, l)$ であるから $\delta(wu)=\delta(w')$. 従って wu と w' は命題 4.1 の条件 (1)-(3) を満たす．よって $wu \equiv_{L_\varphi(H)} w'$ を得る．同様に，
$\varphi(v) = (\sigma_{lt}^{-1}\delta(w')^{-1}\delta(w); t, j)$ であるようなある $v \in A^*$ に対し，$w \equiv_{L_\varphi(H)} w'v$ であることが示せる．よって $[w]\mathcal{R}[w']$.
(2),(3) の証明は (1) の右-左双対なので省略する．証明終.

命題 4.3. Σ を群 G の部分群 H 上の行列とする．$\varphi : A^* \to M(G; I, J; \Sigma)^1$ が上への morphism ならば，$L_\varphi(H)$ の syntactic monoid の自明でない $\mathcal{H}$-class は剰余群 $G/H(H)$ と同形である．

証明. [10] の命題 3.6 により，Σ は H-正規化されていると仮定してよい．$U=\{g_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ を G における H の右剰余類の代表系とする．各 $g_\lambda \in U$ に対し，$\varphi(w_\lambda)=(g_\lambda; 1, 1)$ であるような $w_\lambda \in A^*$ が存在する．$G_{11}=\{[w_\lambda] | \lambda \in \Lambda\}$ とおく．すると，系 4.2 により，集合 G_{11} はある $\mathcal{H}$-class $\mathcal{H}_{11}$ に含まれる．

$G_{11} = \mathcal{H}_{11}$ であることを示す．$[w] \in \mathcal{H}_{11}$ かつ $\varphi(w)=(g; i, j)$ とすると，$[w]\mathcal{H}[w_\lambda]$. 従って，系 4.2 により，
$\sum_i^C \equiv \sum_1^C \bmod G_\Sigma(H)$ かつ $\sum_j^R \equiv \sum_1^R \bmod G_\Sigma(H)$.
よって，$g \in H(H)g_\mu$ であるような，ある w_μ に対し，$w \equiv_{L_\varphi(H)} w_\mu$. よって $[w]=[w_\mu] \in G_{11}$，よって $\mathcal{H}_{11} \subset G_{11}$. 従って $\mathcal{H}_{11}=G_{11}$ をうる．

対応 $\theta : G_{11} \to G/H(H)$ を次で定義する．

$$\theta([w])=\sigma_{11}\delta(w)H(H).$$

もし $w \in [w_\lambda]$ ならば，$\delta(w)H(H)=\delta(w_\lambda)H(H)$，よって $\sigma_{11}\delta(w)H(H)=\sigma_{11}\delta(w_\lambda)H(H)$. 従って θ の定義は確定している (well-defined である). 命題 4.1 により，θ は全単射である. $u \in [w_\lambda]$, $v \in [w_\mu]$, $\varphi(u)=(\delta(u);i,j), \varphi(v)=(\delta(v);k,l)$ とする. 命題 4.1 のより，ある $x,y \in G_\Sigma(H)$ に対し，$\sigma_{jk}=x\sigma_{j1}$, $\sigma_{j1}=y\sigma_{11}$ である. xy が正規部分群 $H(H)$ の元であることに注意すれば，

$$\begin{aligned}\sigma_{11}\delta(uv)H(H) &= \sigma_{11}g_\lambda\sigma_{jk}g_\mu H(H)\\ &= \sigma_{11}g_\lambda xy\sigma_{11}g_\mu H(H)=\sigma_{11}g_\lambda\sigma_{11}g_\mu H(H).\end{aligned}$$

よって $\theta([w_\lambda][w_\mu])=\theta([w_\lambda])\theta([w_\mu])$ となり，G_{11} は $G/H(H)$ に同形である. 証明終.

命題 4.4. H を群 G の部分群，Σ を H-正規化された行列とする. $\varphi: A^* \to M(G;I,J;\Sigma)^1$ を上への morphism とすると，次の 3 条件は同値である.
(1) $L_\varphi(H)$ の基底は group code である.
(2) $1 \in A^*$ の $\equiv_{L_\varphi(H)}$-class $[1]$ は一元集合ではない.
(3) すべての $i,k{\in}I$ に対し，$\sum_i^C \equiv \sum_k^C \bmod G_\Sigma(H)$ が成り立つ. そして，すべての $j,l{\in}J.$ に対し，$\sum_j^R \equiv \sum_l^R \bmod G_\Sigma(H)$ が成り立つ.

証明. (1) $\Rightarrow$ (2). $L_\varphi(H)$ の syntactic monoid は群である. $w \in A^+$, $\varphi(w)=(\sigma_{ji}^{-1};i,j)$ とする. $\varphi(w^2)=\varphi(w)$ であるから，命題 4.1 により $[w^2]=[w]$. 群は唯一つの巾等元を持つから，$[1]=[w]$.
(2) $\Rightarrow$ (3). $w \in [1]$, $\varphi(w)=(\delta(w);i,j)$ とする. 任意の $(g;k,l)$ に対し，$\varphi(u)=(g;k,l)$ であるような，ある $u \in A^*$ が存在する. $[uw]=[wu]=[u]$ かつ

$$\varphi(uw)=(g\sigma_{li}\delta(w);k,j),\ \varphi(wu)=(\delta(w)\sigma_{jk}g;i,l),$$

であるから，命題 4.1 により，

$$\textstyle\sum_i^C \equiv \sum_k^C \bmod G_\Sigma(H), \quad \sum_j^R \equiv \sum_l^R \bmod G_\Sigma(H)$$

を得る.
(3) $\Rightarrow$ (1). 系 4.2 により，任意の $w,w' \in A^+$ について $[w]\mathcal{H}[w']$. よって，すべての $[w], w \in A^+$, は同じ $\mathcal{H}$-class に属している. G_{11} を命題 4.3 の証明中の G_{11} と同じ集合とする. $1 \in A^*$ について，$[1] \in G_{11}$ であることを示す. $w \in A^*$ を $\varphi(w)=(\sigma_{11}^{-1};1,1)$ であるような元とする. $(u,v) \in Cont_{L_\varphi(H)}(1)$ とすると，次の場合が考えられる.

$(i)\, u{=}v{=}1$, $(ii)\, u{=}1$, $v{\in}A^+$, $(iii)\, u{\in}A^+, v{=}1$, $(iv)\, u,v{\in}A^+$.

(i) の場合，$w{\in}L_\varphi(H)$ だから，

$$(1,1){\in}(Cont_{L_\varphi(H)}(1) \cap Cont_{L_\varphi(H)}(w))$$

となる.
(ii) の場合，$L_\varphi(H)$ は biunitary submonoid である ([10]. 命題 3.3) から，

$$1{\cdot}1{\cdot}v{\in}L_\varphi(H) \iff 1{\cdot}w{\cdot}v \in L_\varphi(H).$$

(iv) の場合. $\varphi(u)=(\delta(u);i,j)$, $\varphi(v)=(\delta(v);k,l)$ とする. 条件 (3) より，ある $x,y,z{\in}G_\Sigma(H)$ について

$$\sigma_{11}{=}x\sigma_{j1},\ \sigma_{11}{=}y\sigma_{1k},\ \sigma_{jk}{=}z\sigma_{11}.$$

x,y and z が正規部分群 $H(H)$ の元であることに注意すれば，

$$\begin{aligned}&(u,v){\in}Cont_{L_\varphi(H)}(1)\\ &\Leftrightarrow \delta(u)\sigma_{jk}\delta(v){\in}H \Leftrightarrow \delta(u)z\sigma_{11}\delta(v){\in}H\\ &\Leftrightarrow \delta(u)\sigma_{11}\delta(v){\in}H \Leftrightarrow \delta(u)\sigma_{11}\sigma_{11}^{-1}\sigma_{11}\delta(v){\in}H\\ &\Leftrightarrow \delta(u)x\sigma_{j1}\sigma_{11}^{-1}y\sigma_{1k}\delta(v){\in}H \Leftrightarrow \delta(u)\sigma_{j1}\sigma_{11}^{-1}\sigma_{1k}\delta(v){\in}H\\ &\Leftrightarrow \delta(uwv){\in}H \Leftrightarrow (u,v){\in}Cont_{L_\varphi(H)}(w).\end{aligned}$$

従って，$Cont_{L_\varphi(H)}(1){=}Cont_{L_\varphi(H)}(w)$，よって $[1]{\in}G_{11}$. つまり $L_\varphi(H)$ の syntactic monoid は G_{11} である. 上への morphism $\theta: A^* \to G/H(H)$ を $\theta(w){=}H(H)\sigma_{11}\delta(w)$ で定義すると，$L_\varphi(H){=}\theta^{-1}(H/H(H))$ となり，(1) が成り立つ. 証明終.

系 4.5. H を群 G の部分群，Σ を H 上の $J{\times}I$ 行列，そして

$$\varphi: A^* \to M(G;I,J;\Sigma)^1$$

を上への morphism とする. もし $Card(I){=}1$ または $Card(J){=}1$ ならば，$L_\varphi(H)$ の基底は group code である.

証明. $Card(I){=}1$ と仮定する. 命題 3.6 により，$\Sigma{=}(\sigma_{j1}), j \in J$, は H-正規化されていると仮定してよい. すべての $j,l \in J$ について $\sigma_{j1}\sigma_{l1}^{-1} \in G_\Sigma(H)$ であるから，命題 4.4 により $L_\varphi(H)$ の基底は group code である. 証明終.

命題 4.6. H を群 G の部分群，Σ を H-正規化された行列，$\varphi: A^* \to M(G;I,J;\Sigma)^1$ を上への morphism とする. もし G_Σ または H が G の正規部分群ならば，$L_\varphi(H)$ の基底は group code である.

証明. もし G_Σ が G の正規部分群ならば，任意の $g \in G$ に対し，$G_\Sigma = g^{-1}G_\Sigma g \subseteq g^{-1}Hg$ が成り立つので，任意の $g \in G$ に対し $G_\Sigma \subseteq g^{-1}Hg$. よって $G_\Sigma \subseteq H(H)$，よって $G_\Sigma(H) = H(H) \cap G_\Sigma = G_\Sigma$.
もし H が G の正規部分群ならば，$H(H) = H$. 従って，$G_\Sigma(H) = H(H) \cap G_\Sigma = G_\Sigma = H \cap G_\Sigma = G_\Sigma$. いずれにしても，$G_\Sigma(H){=}G_\Sigma$. 従って，任意の $\sigma_{ji}, \sigma_{lk} \in G_\Sigma$ について，$\sigma_{ji}\sigma_{lk}^{-1} \in G_\Sigma(H)$. よって命題 4.4 の条件 (3) が成り立つ. 従って $L_\varphi(H)$ の基底は group code である. 証明終

命題 4.7. Σ を H 上の $J{\times}I$ 行列とし，

$$\varphi: A^* \to M(G;I,J;\Sigma)^1$$

を上への morphism とする. もし $G/H(H)$ が可換群ならば，$L_\varphi(H)$ の基底は group code である.

証明. [10, 命題 3.6] により，Σ は H-正規化された行列と仮定してよい. もし $G/H(H)$ が可換ならば，$H/H(H)$ は $G/H(H)$ の正規部分郡である. よって H は G の正規部分群である. 命題 4.6 により，$L_\varphi(H)$ は group code である. 証明終.

系 4.8. Σ を H 上の $J \times I$ 行列，$\varphi: A^* \to M(G;I,J;\Sigma)^1$ を上への morphism とする. もし G が可換群ならば，$L_\varphi(H)$ の基底は group code である.

証明. 略.

ここで，group code についての注意を述べておく. G を群，$1_G \in G$ をその単位元とする.

$$\varphi: A^* \to G,\ \varphi(1) = 1_G$$

を上への準同型写像とする (morphism). G の部分群 H に対し $L_H = \varphi^{-1}(H)$ と置く. L_H は A^* の free submonoid をなす. その基底 (極小生成系)

$$C = (L_H - \{1\}) - (L_H - \{1\})^2$$

は A 上の code をなす．このような群と上への morphism を用いて得ることが出来る code を group code と呼んだ．G の 1 添加 G^1 を考える．G^1 はもはや群ではない．単なる monoid である．$\varphi(1)=1$，$\eta|_A=\varphi|_A$ で定義する．

$$L_\eta(H)=\eta^{-1}(H)\cup\{1\}$$

と置くと，$A/\equiv_{L_H}\ \cong\ A/\equiv_{L_\eta(H)}$．群として同型．となる．$L_\eta(H)-\{1\}=L_H-\{1\}$ であるから，$L_\eta(H)$ と L_H の基底は一致する．従って，group code は群を用いなくとも得ることが出来る．
さらに，次の例は A^* から，群の 1 添加ではない完全単純半群の 1 添加の上への morphism によって group code が出現する例である．

例 4.2. $A=\{a,b\}$, $G=<x,y\,|\,x^3=y^2=(xy)^2=1>$，3 次対称群とする．$H=<y>$, 位数 2 の部分群, とする．

$$\Sigma=\begin{pmatrix} y & y \\ y & y \end{pmatrix}.$$

$\varphi: A^*\to M(G;2,2;\Sigma)^1$ を次で定義する．

$$\varphi(a)=(x:1,1),\varphi(b)=(x^2:2,2).$$

すると，$\varphi(a^{2m})=(y:1,1), m\geq 1$, $\varphi(a^{2n+1})=(x:1,1), n\geq 0$,
そして，
$\varphi(b^{2m})=(y:2,2), m\geq 1$, $\varphi(b^{2n+1})=(x^2:2,2), m\geq 0$,
である。
$\varphi(ab)=(x^2y:1,2), \varphi(a^2b)=(x^2:1,2)$,
$\varphi(aba)=(1_G:1,1), \varphi(a^2ba)=(x^2y:1,1)$,
$\varphi((a^2ba)^2)=(xy:1,1), \varphi(a^2ba\cdot aba)=(x^2:1,1)$,
従って，$\varphi(a)$ と $\varphi(b)$ で生成される部分半群 $<\varphi(a),\varphi(b)>$ は集合 $(G;1,1)$ を含む．従って，$(G;1,1)(x^2;2,2)=(Gyx^2;1,2)$ $=(G;1,2)$ を含む．同様にして，$<\varphi(a),\varphi(b)>$ は $(G;2,1)$, $(G;2,2)$ を含み，φ は上への写像である．$G_\Sigma(H)=\{1_G\}$ である．命題 4.4 の (3) により，$L_\varphi(H)$ の基底は group code である．このことを具体的に見てみる．
$\varphi(ab^{2n+1}a)=(y:1,1), \varphi(ab^{2n}a)=(1_G:1,1), n\geq 0$.
$\varphi(ba^{2n+1}b)=(1_G:2,2), \varphi(ba^{2n}b)=(y;2,2), n\geq 0$.
従って，$L_\varphi(H)$ の基底は $C=ab^*a+ba^*b$ である．
次の表で与えられる遷移関数を持つオートマトン

$$\mathcal{A}=(\{1,2,3\},\{a,b\},\delta,1,\{1\})$$

を考える．(表は $\delta(1,a)=2$, のように読む)

δ	1	2	3
a	2	1	3
b	3	2	1

このオートマトンは $L_\varphi(H)=C^*$ を受理する．その syntactic monoid は明らかに 3 次対称群である．

半群 S ($|S|>1$ とする) が S 以外にイデアルをもたないとき，S は**単純**であるという．S が単純であって極小右イデアル，極小左イデアルをもつとき，S を**完全単純半群**という．Rees matrix semigroup は完全単純半群であり，逆に完全単純半群は Rees matrix semigroup で表現されることはよく知られた事実である．

集合 I 上の同値関係 $\approx_C$ を $i,k\in I$ に対し

$$i\approx_C k \Longleftrightarrow \sum\nolimits_i^C \equiv \sum\nolimits_k^C \bmod G_\Sigma(H)$$

で定義する．I' を I 上の同値関係の $\approx_C$ の代表系とする．$[i]_C$ で $i\in I'$ の $\approx_C$-類を表す．同様に，J 上の同値関係 $\approx_C$ を $j,l\in J$ に対し

$$j\approx_R l \Longleftrightarrow \sum\nolimits_j^R \equiv \sum\nolimits_l^R \bmod G_\Sigma(H)$$

で定義する．J' を J 上の同値関係 $\approx_R$ の代表系とする．$[j]_R$ で $j\in J'$ の $\approx_R$-類を表す．
もし $[u],[v]\in A^*/\equiv_{L_\varphi(H)}$, $u,v\in A^+$, でかつ
$\varphi(u)=(x;i,j)$, $\varphi(u)=(y;k,l)$
ならば，命題 4.1 により，

$$[u]=[v]\Longleftrightarrow xy^{-1}\in H(H),\ i\approx_C k, j\approx_R l.$$

次の命題は $A^*/\equiv_{L_\varphi(H)}$ は，group code でなければ，完全単純半群の 1 添加になっていることを示す．G が有限群無限群であることを問わず，また添え字集合 I や J が有限無限を問わず命題は成立することに注意すべきである．なぜならば，G.Lallement and C. Reis[7] により，G,I,J の全てが有限の場合の全ての"elementary codes"の構成法が与えられている．しかし，例えば G が無限群の場合はいかようにして"elementary codes"を構成するかはこれまでほとんど知られていなかった．僅かに中畑 [6] の構成例があるくらいである．本研究により code C が稠密でなければ，C はすべて上への morphism $\varphi: A^*\to M(G;I,J;\Sigma)^1$

命題 4.9. Σ は H-正規化された行列で，
$\varphi: A^*\to M(G;I,J;\Sigma)^1$
は上への morphism とする．このとき $A^*/\equiv_{L_\varphi(H)}$ は群であるか，または完全単純半群に 1 添加したものである．

証明. $S'=A^*/\equiv_{L_\varphi(H)}$ とおく．S' が群でないとする．すると，$[1]\in S', 1\in A^*$ は一元集合である．したがって，任意の $w_1,w_2\in A^+$ について，$[w_1][w_2]\in S'-\{[1]\}$．従って $S=S'-\{[1]\}$ は S' の部分半群をなす．S が完全単純半群であることを示す．
$M\subseteq S$ を S の任意のイデアルとする．はじめに $M=S$ を示す．$[w]\in M$, $\varphi(w)=(x;i,j)$, を任意の元とする．$[u]\in S$, $\varphi(u)=(y;p,s)$, も任意の元とする．φ は全射だから，$\varphi(v_1)=(\sigma_{qi}^{-1};p,q), \varphi(v_2)=(\sigma_{jr}^{-1}x^{-1}y;r,s)$ となる v_1, $v_2\in A^+$ が存在する．
$\varphi(v_1wv_2)=(\sigma_{qi}^{-1};p,q)(x;i,j)(\sigma_{jr}^{-1}x^{-1}y;r,s)$
$=(y;p,s)=\varphi(u)$．よって $[v_1][w][v_2]\in[v_1]M[v_2]\subseteq M$．よって $S\subseteq M$，つまり，$M=S$．よって S は単純である．
つぎに，

$$M_i=\{[w]\in S\,|\,\varphi(w)=(\delta(w);k,l),\ p\approx_C i\}$$

とおく．M_i が S の極小右イデアルが存在することを示す．
$[u_1],[u_2]\in M_i, \varphi(u_1)=(\delta(u_1);k,l), \varphi(u_2)=(\delta(u_2);p,q)$ ならば，$k\approx_C i, p\approx_C i$ である．$\varphi(u_1u_2)=(\delta(u_1u_2);k,q)$, $k\approx_C i$ より，$[u_1][u_2]\in M_i$．つまり M_i は部分半群をなす．
任意の $[u]\in M_i, \varphi(u)=(\delta(u);k,l)$ と任意の $[v]\in S$,

$\varphi(v)=\delta(v;s,t)$ に対し，$\varphi(uv)=(\delta(u_1v);k,t)$．$k\approx_C i$，より $[uv]\in M_i$，つまり $M_i[v]\subseteq M_i$．したがって，M_i は右イデアルである．つぎに M_i が極小右イデアルであることを示す．$M\subseteq S$ を $M\subseteq M_i$ なる S の右イデアルとする．任意の $[v]\in M$, $\varphi(v)=(\delta(v);s,t)$ に対し，$\varphi(w)=(\sigma_{tp}^{-1}\delta(v)^{-1}\delta(u);p,l)$ なる $u\in A^+$ が存在する．よって，$\varphi(vw)=(\delta(u);s,l)$．$[v]\in M\subseteq M_i$ より，$s\approx_C i\approx_C k$．よって $[vw]=[u]$．よって，$[u]\in M[w]\subseteq M$．従って，$M_i\subseteq M$，つまり $M=M_i$．よって M_i は極小右イデアルである．同様にして，$N_j=\{[w]\in S\,|\,\varphi(w)=(\delta(w);k,l),\,l\approx_C j\}$ は S の極小左イデアルであることが示せる．　証明終

$\Sigma'=(H(H)\sigma_{ji})$ を $G/H(H)$ 上の $J'\times I'$ 行列とする．もし $A^*/\equiv_{L_\varphi(H)}$ が群でなければ, 上への morphism
$$\theta: A^*/\equiv_{L_\varphi(H)}\to M(G/H(H);I',J';\Sigma')^1$$
を次で定義する．$\theta([1])=1$, $w\in A^+$ に対しては, $\varphi(w)=(x;i,j)$, $i\in[i']_C, j\in[j']_R$ のとき $\theta([w])=(H(H)x;i',j')$．

もし $v\in[w]$, $\varphi(u)=(y;k,l)$ ならば，$xy^{-1}\in H(H), k\in[i]_C=[i']_C, l\in[j]_R=[j']_R$ である．このとき，$\theta([v])=(H(H)y;i',j')=(H(H)x;i',j')=\theta([w])$ となり，θ の定義は確定している．$[w']\in A^*/\equiv_{L_\varphi(H)}, \varphi(w')=(z;p,q)$ について $\theta([w'])=\theta([w])$ とすると，$xz^{-1}\in H(H)$，$p\in[i']_C=[i]_C$, $q\in[j']_R=[j]_R$ である．従って，$[w']=[w]$ であるから θ は単射である．任意の $(H(H)x;i',j')\in M(G/H(H);I',J';\Sigma')$ に対し，$\varphi(w)=(x;i',j')$ となる $w\in A^+$ を考えれば，$\theta([w])=(H(H)x;i',j')$ であるから，θ は全射である．$\varphi(u_1)=(z_1;p,q)$, $p\in[p']_R$, $q\in[q']_C$, $\varphi(u_2)=(z_2;r,s)$, $r\in[r']_R$, $s\in[s']_C$ とする．$\theta([u_1])\theta([u_2])=(H(H)z_1;p',q')(H(H)z_2;r',s')=(H(H)g;p',s')$，ここで $g=z_1\sigma_{q'r'}z_2$．一方，$\varphi(u_1u_2)=(z_1\sigma_{qr}z_2;p,s)$．$r\approx_C r'$ より，$\sigma_{q'r'}\sigma_{q'r}^{-1}\in G_\Sigma(H)$．$q'\approx_R q$ より，$\sigma_{q'r}\sigma_{qr}^{-1}\in G_\Sigma(H)$．従って，$(\sigma_{q'r'}\sigma_{q'r}^{-1})(\sigma_{q'r}\sigma_{qr}^{-1})=\sigma_{q'r'}\sigma_{qr}^{-1}\in G_\Sigma(H)$．よって，$\sigma_{q'r'}=h\sigma_{qr}$, $h\in H(H)$．従って，$H(H)g=H(H)z_1\sigma_{qr}z_2$．従って，$\theta([u_1])\theta([u_2])=\theta([u_1][u_2])$ となり，θ は半群としての同形写像である．以上により，次の命題が証明された．.

命題 4.10. Σ は H-正規化された行列で，
$$\varphi: A^*\to M(G;I,J;\Sigma)^1$$
は上への morphism とする．もし $A^*/\equiv_{L_\varphi(H)}$ が群でないならば，$A^*/\equiv_{L_\varphi(H)}$ は $M(G/H(H);I',J';\Sigma')^1$ に同形である．

$M(G/H(H);I',J';\Sigma')$ は $M(G;I,J;\Sigma)$ と H で決定される．つまり，$M(G/H(H);I',J';\Sigma')^1$ の構成は φ によらない．従って，命題 4.10 により，もし φ と ψ が A^* から $M(G;I,J;\Sigma)^1$ の上への morphism ならば，$A^*/\equiv_{L_\varphi(H)}$ と $A^*/\equiv_{L_\psi(H)}$ は同形である．

以下に述べる命題 4.11 の証明には次の結果 ([1,p.264]) が必要である；もし X が thin maximal biprefix code であり $\mathcal{A}=(Q,A,\pi,1,\{1\})$ が X^* を認識する可移オートマトンならば

(1) すべての $w\in A^*$ に対し，$1\in\pi(Q,w)$,
(2) すべての $w\in A^*$ に対し，誘導式 $[\pi(s,w)=\pi(1,w)\Longrightarrow s=1]$ が成り立つ．

命題 4.11 X を thin maximal biprefix code，$\mathcal{A}$ を X^* を認識する可移オートマトンとする．もし transition semigroup $T(\mathcal{A}^+)$ が完全単純半群ならば，$X^*=L_\varphi(H)$ を満たすような，ある完全単純半群 $M(G;I,J;\Sigma)$，と群 G のある部分群 H とある上への morphism $\varphi: A^*\to M(G;I,J;\Sigma)^1$ が存在する．

証明． $\mathcal{A}=(Q,\,A,\,\pi,\,1,\,\{1\})$ を X^* を認識する可移オートマトンとする．$\{R_i\,|\,i\in I\}$ と $\{L_j\,|\,j\in J\}$ をそれぞれ $T(\mathcal{A}^+)$ の $\mathcal{R}$-類と $\mathcal{L}$-類の集合とする．さらに，r_i を $R_i\cap L_1$, $i\in I$ のべき等元，q_j を $R_1\cap L_j$, $j\in J$ のべき等元とする，ここで $q_1=r_1=e\in R_1\cap L_1$ とする．$J\times I$ 行列 Σ を $\Sigma=(q_jr_i)$ と定義する．Σ は群 $G=L_1\cap R_1$ 上の行列である．H を G における 1 の固定部分群とする．つまり $H=\{h\in G\,|\,(1)h=1\}$ とする．任意のべき等元 $q\in T(\mathcal{A}^+)$，について，$(1')q=1$, $1'\in Q$, とすると；$(1)q=(1')q^2=(1')q=1$ であるから，q_jr_i は 1 を固定する，つまり $q_ir_j\in H$．従って，Σ は H 上の行列である．対応 $\theta: M(G;I,J;\Sigma)\to T(\mathcal{A}^+)$ を $\theta(g;i,j)=r_igq_j$ で定義する．θ は $M(G;I,J;\Sigma)$ から $T(\mathcal{A}^+)$ の上への同形写像である (文献 [2,p.92])．

対応 $\varphi: A^*\to M(G;I,J;\Sigma)^1$ を，もし $a\in A$ かつ $\pi_{\mathcal{A}}(a)\in R_k\cap L_l$ ならば，
$$\varphi(a)=(e\pi_{\mathcal{A}}(a)e;k,l)$$
で定義する．任意の $u\in A^+, \pi_{\mathcal{A}}(u)\in R_i\cap L_j$ に対し $\varphi(u)=(e\pi_{\mathcal{A}}(u)e;k,l)$ であることを，u の長さについての帰納法で示す．$\pi_{\mathcal{A}}(w)\in R_i\cap L_j$ に対し $\varphi(w)=(e\pi_{\mathcal{A}}(w)e;i,j)$ が成り立つと仮定する．もし $a\in A, \pi_{\mathcal{A}}(a)\in R_k\cap L_l$ ならば $\varphi(wa)=(e\pi_{\mathcal{A}}(w)eq_jr_ke\pi_{\mathcal{A}}(a)e;i,l)$．$eq_j=q_j$ and $r_ke=r_k$ であるから，

$e\pi_{\mathcal{A}}(w)eq_jr_ke\pi_{\mathcal{A}}(a)e=e\pi_{\mathcal{A}}(w)q_jr_k\pi_{\mathcal{A}}(a)e$.

$\pi_{\mathcal{A}}(w)\in R_i\cap L_j$ と $\pi_{\mathcal{A}}(a)\in R_k\cap L_l$ より，$\pi_{\mathcal{A}}(w)q_j=\pi_{\mathcal{A}}(w)$ かつ $r_k\pi_{\mathcal{A}}(a)=\pi_{\mathcal{A}}(a)$．よって，

$\varphi(wa)=(e\pi_{\mathcal{A}}(wa)e;i,l)$ かつ $\pi_{\mathcal{A}}(w)\pi_{\mathcal{A}}(a)\in(R_i\cap L_j)(R_k\cap L_l)=R_i\cap L_l$．よって，もし $u\in A^+$, $\pi_{\mathcal{A}}(u)\in R_i\cap L_j$ ならば $\varphi(u)=(e\pi_{\mathcal{A}}(u)e;i,j)$ であることが示された．

つぎに φ が上への写像であることを示す．S を $\{\varphi(a)\,|\,a\in A\}$ で生成される $M(G;I,J;\Sigma)$ の部分半群とする．もし $e=\pi_{\mathcal{A}}(u)\in R_1\cap L_1$, $u=b_1b_2\cdots b_m, b_t\in A, 1\le t\le m$ ならば，ある $j'\in J$ and $k'\in I$ に対し，$\pi_{\mathcal{A}}(b_1)\in R_1\cap L_{j'}$ $\pi_{\mathcal{A}}(b_m)\in R_{k'}\cap L_1$ であり，
$$\varphi(u)=(e\pi_{\mathcal{A}}(u)e;1,1)=(e;1,1)\in S.$$

各 $\pi_{\mathcal{A}}(w)\in T(\mathcal{A}^+)$ について，$\varphi(uwu)=(e\pi_{\mathcal{A}}(w)e;1,1)\in S$ がなりたつから，$(G:1,1)=(eT(\mathcal{A}^+)e;1.1)\subset S$．$\pi_{\mathcal{A}}: A^*\to T(\mathcal{A})$ が上への写像であるから，各 $i\in I$ と各 $j\in J$ に対し $x,y\in A$ $\pi_{\mathcal{A}}(x)\in R_i$, $\pi_{\mathcal{A}}(y)\in L_j$ であるような $x,y\in A$ が存在する．このとき，ある $t\in J$ とある $s\in I$ について，$\varphi(x)=(e\pi_{\mathcal{A}}(x)e;i,t)$ $\varphi(y)=(e\pi_{\mathcal{A}}(y)e;s,j)$．このことと $eT(\mathcal{A}^+)e$ が群であるという事実より，$e\pi_{\mathcal{A}}(x)e\cdot eT(\mathcal{A}^+)e\cdot e\pi_{\mathcal{A}}(y)e=eT(\mathcal{A}^+)e$ つまり $\varphi(x)(G;1,1)\varphi(y)=(G;i,j)\subset S$. をうる．これは φ が上への写像であることを意味する．

$w\in X^+$ とすると $(1)\pi_{\mathcal{A}}(w)=1$．$1\in(Q)e$ であり e は $(Q)e$ 上では単位置換であるから，$(1)e\pi_{\mathcal{A}}(w)e=1$．よって $\varphi(w)\in\tilde{H}$，つまり $w\in L_\varphi(H)$．

逆に，$w\in L_\varphi(H)$ とすると，ある $i\in I, j\in J$ について，$\varphi(w)=(e\pi_{\mathcal{A}}(w)e;i,j)\in\tilde{H}$．よって，$(1)e\pi_{\mathcal{A}}(w)e=1$ より，$((1)\pi_{\mathcal{A}}(w))e=1$, かつ $(1)e=1$.．従って命題 4.11 に先立つ注意により，$(1)\pi_{\mathcal{A}}(w)=1$．よって，$w\in X^*$．以上より $X^*=L_\varphi(H)$．　証明終．

上記の証明は比較的に複雑である．半群論のよく知られた定

理は断ることなく使用している．やや難解と思われるので、具体例をあげて詳細する．

例 4.3. $A=\{a,b\}$ の部分集合

$$X=\{a^3,a^2ba,a^2b^2,ab,ba^2,baba,bab^2,b^3\}$$

は有限極大 bifix code である．は次の遷移関数を持つものオートマトン

$$\mathcal{A}=(\{1,2,3,4,5\},\{a,b\},\delta,1,\{1\})$$

は X^* を受理する可移オートマトンである．

δ	1	2	3	4	5
a	2	3	1	3	1
b	4	1	5	5	1

$\mathcal{A}^+$ の transition semigroup T は恒等置換と二つの変換

$$x=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&1&3&1\end{pmatrix}\quad \alpha=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&1&5&5&1\end{pmatrix}$$

で生成される完全単純半群である．T は位数 24 の半群で 4 つの $\mathcal{H}$-類を持つ．$\mathcal{H}$-類の一つは 6 元からなる

$$G=\{x,x^2,e=x^3,y=x\alpha x,xy,x^2y\}$$

である．この $\mathcal{H}$-類が 3 次対称群と同型であることは容易に確かめるが出来る．e が G における単位元である．T 中のべき等元は $e,(x^3\alpha^3)^2,(\alpha^3x^3)^2,\alpha^3$ の 4 つである．

$$e=r_1=q_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&3&2&3\end{pmatrix}$$

$$q_2=(x^3\alpha^3)^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&4&5&4&5\end{pmatrix}$$

$$r_2=(\alpha^3x^3)^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&3&3&2\end{pmatrix}$$

とおく．2 次の行列を $\Sigma=(q_jr_i), 1\le j,i\le 2$ で定義する；

$$\Sigma=\begin{pmatrix}e&e\\e&xy\end{pmatrix}$$

Σ は G 上の行列となる (一般論として成り立つ事実である，たとえば文献 [2] を参照されたし)．各べき等元は 1 を固定する．したがって Σ は G 中の 1 の固定部分群 $H=\{e,xy\}$ 上の行列になっている．

$$exe=x,\ e\alpha e=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&3&1&3\end{pmatrix}=y$$

Rees matrix semigroup を $M(G;2,2;\Sigma)$ で定義する．そして $\varphi: A^*\to M(G;I,J;\Sigma)^1$ を，$\varphi(1)=1$, かつ

$$\varphi(a)=(x;1,1),\ \varphi(b)=(y;2,2)$$

で定義する．すると φ は上への morphism である．このとき X^*=$L_\varphi(H)$ となるというのが、命題の主張である．

本論文では，完全単純半群の 1-添加をその syntactic monoid として持つ free submonoid の構成について述べた．その基底が有限な場合は G.Lallement and C. Reis[7] の研究がある．しかし，無限 code を扱うときはこの大きな研究成果をそのまま利用することは出来ない．証明には有限性が使われている部分があるからである．従って，本論文では上記 [7] の手段によらない方法で対象を無限の場合に拡げた．morphism φ による code の構成は時として膨大な計算が要求される．そこで，適当なオートマトンの構成が望まれる．これに対する解答を筆者は見出しているが紙面の都合でここで述べる余裕はなく次の機会に解説する．

References

[1] J.Berstel and D.Perrin, *Theory of Codes*, Academic Press, New York, 1985.

[2] A.H.Clifford and G.B.Preston, *The Algebraic Theory of Semigroups*, Vol.1, American Mathematical Society, Mathematical Surveys 7, 1961.

[3] G.Lallement, *Semigroup and Combinatorial Applications.* Wiley, New York, 1979.

[4] M.Katsura and G.Tanaka, Groups of finite elementary codes, *Words, Languages and Combinatorics*, pp.251-261, World Scientific Publishing, Singapore, 1992.

[5] M.Katsura and G.Tanaka, Groups of finite elementary codes, Theoretical Computer Science 108 (1993), pp.119-149.

[6] G.Lallement and D.Perrin, A graph covering construction of all the finite complete biprefix codes, *Discrete Math.*36 (1981) 261-271.

[7] G.Lallement and C. Reis, Team tournaments and finite elementary codes, *Inform. and Control* 48 (1981) 11-29.

[8] 中畑登，biprefix code の 1 つの族について，京都大学数理解析研究所講究録 697,1989, pp.70-89.

[9] D.Perrin, Codes Bipréfixes et groupes de permutations, Thèse Doctorat d'État, Université de Paris VII, 1975.

[10] 田中源次郎，自由単位半群の biunitary submonoid の syntactic monoid について I，静岡理工科大学紀要 2004，pp.151-164.

[11] G.Tanaka, On syntactic monoids of biunitary submonoids determined by homomorphisms from free semigroups onto completely simple semigroups, Theoretical Computer Science 352 (2006), pp.57-70.